

非反復型時間積分法の非線形 FEM 解析への適用性評価

Evaluation of Applicability of Non-Iterative Time Integration Method to Nonlinear FEM Analysis

小 磯 利 博

要 約

有限要素法を用いた非線形時刻歴応答解析の高速化を図るため、Honda et al.により提案された非反復型時間積分法 (NITI 法) に着目し、その適用性を検討した。まず、NITI 法の数値特性を理論的に調べたところ、剛性や減衰係数が劣化する非線形問題では無条件安定で、一般の材料非線形問題に適した性質を有することが分かった。また、時間刻みを細かくすることで平均加速度法と同等の精度を確保できることが分かった。次に、高速化に対する有効性を確認するため、2層の壁式 RC 造建物の非線形応答解析を行った。演算時間を比較すると、NITI 法は平均加速度法の約 42%、衝撃加速度法の約 67%であった。演算時間の内訳を詳細に分析したところ、NITI 法は、平均加速度法の安定性の高さと、衝撃加速度法の収束計算が不要という特長を兼ね備えていることで、演算時間が短縮できたことが分かった。

目 次

- I. はじめに
- II. 非反復型時間積分法 (NITI 法) の概要
- III. 時間積分法の安定性
- IV. 時間積分法の精度
- V. 数値計算例
- VI. まとめ

I. はじめに

近年、建物全体をシェル要素やソリッド要素で詳細にモデル化した解析モデルが用いられるようになってきた^{例えば 1)}。複雑な形状も忠実にモデル化できること、部材内部の局所的な応力やひずみが直接評価できること等の利点を有している。また、材料の応力-ひずみ関係に基づいた非線形特性が考慮できるので、劣化挙動等を精度よく追跡することが可能である。しかし、柱・梁・壁等の各部材を有限要素で細分化するため、従来の質点系モデルに比べると、解くべき運動方程式の未知数が著しく多くなる。非線形問題の場合、剛性マトリクスの再構築や分解、収束計算等のために多大な演算時間が必要になり、その短縮が望まれる。

一般に時刻歴応答解析では、運動方程式の時間積分法として、陰解法と陽解法が挙げられる。陰解法^{2), 3)}は、マトリクスの分解や収束計算等により1ステップあたりの演算量は多いが、時間刻みに関する安定性条件は緩やかである。一方、陽解法⁴⁾は1ステップあたりの演算量は少ないものの、時間刻みに関する安定性条件⁴⁾が厳しく、多自由度系モデルではごく細かい時間刻みが必要になる。

また、陰解法と陽解法を組み合わせ、各々の特長を活かした混合積分法が開発されている。系の剛性を線形部分と非線形部分に分割し、それぞれを陰解法と陽解法で解く OS 法⁵⁾や、地盤-建物連成解析を対象に、解析モデルを陰解法領域と陽解法領域に分割する手法⁶⁾が提案されている。さらに、一般的な有限要素法への適用を念頭においた手法として、Honda et al.⁷⁾により非反復型時間積分法 (以下 NITI 法) が提案されている。NITI 法は、非線形状態の時間ステップでも剛性マトリクスの分解や復元力に関する収束計算は不要である。よって大規模モデルの非線形時刻歴応答解析に適用した場合、演算時間の短縮が期待できる時間積分法と推測される。

NITI 法は、線形問題では無条件安定で、平均加速度法と全く同じ解が得られる。ただし、剛性が硬化する非線形問題や、速度依存項が大きい問題では解が発散する可能性が指摘されている⁷⁾ものの、その条件は明らかではない。時間刻みに安定条件が課される場合、解析モデルの最高次数の固有周期に対して安定条件を満たさなければならぬ⁴⁾ため、適用にあたっては予め安定条件を把握する必要がある。さらに、求められた応答の精度に関する知見も十分とは言えない。時間積分法の数値解の精度は時間刻みと密接に関わっており⁸⁾、精度を保つためには時間刻みを適切に定める必要がある。

そこで本論では、1自由度系モデルにより NITI 法の時間刻みに関する安定条件や解の精度を理論的に求め、非線形 FEM 時刻歴応答解析への適用可否を検討する。さらに、壁式鉄筋コンクリート造 2階建て建物の FEM モデルの非線形時刻歴応答解析を行い、平均加速度法や衝撃加速度法による結果と比較することで、NITI 法による応答の精度や、演算効率の向上に対する有効性を確認する。

キーワード: 時間積分法, 有限要素法, 非線形問題, 時刻歴応答解析, 計算時間

Keywords: time integration method, finite element method, nonlinear problem, transient response analysis, computation time

II. 非反復型時間積分法 (NITI 法) の概要

Honda et al.⁷⁾により開発された NITI 法は、陰解法と陽解法を組み合わせた時間積分法で、非線形問題で反復計算を必要としない。復元力や減衰力の非線形効果を等価な外力とみなし、そのうちの既知量に対する応答を平均加速度法で、未知量に対する応答を中央差分法で算定し、両者を加算することを基本原理としている。以下に NITI 法による非線形時刻歴応答解析の計算手続きの概要を示す。

外力を受ける多自由度系モデルの運動方程式を式(1)に示す。

$$[M]\{a_{n+1}\} + \{D_{n+1}\} + \{Q_{n+1}\} = \{f_{n+1}\} \quad (1)$$

ここに、 $[M]$ は質量マトリクス、 $\{a\}$ は加速度ベクトル、 $\{D\}$ は減衰力ベクトル、 $\{Q\}$ は復元力ベクトル、 $\{f\}$ は外力ベクトルで、右下添え字は時間ステップを表す。減衰力は当該ステップ($n+1$)の速度、復元力は当該ステップの変位から直接定まると仮定する。陰解法を用いて応答を求める場合は、減衰力と速度の関係、復元力と変位の間を満足させるための反復計算(以下、収束計算と総称)が必要になる。

減衰力や復元力の非線形効果を等価な外力(以下、非線形補正力と総称)に置換し、解析中は変動しない定数マトリクスとして、初期の系の減衰マトリクスと剛性マトリクスを用いると、式(1)の運動方程式は式(2)のようになる。

$$[M]\{a_{n+1}\} + [C_0]\{v_{n+1}\} + [K_0]\{d_{n+1}\} = \{f_{n+1}\} + \{\tilde{Q}_{n+1}\} + \{\tilde{D}_{n+1}\} \quad (2)$$

ここに、 $[C_0]$ は初期の減衰マトリクス、 $[K_0]$ は初期の剛性マトリクス、 $\{v\}$ は速度ベクトル、 $\{d\}$ 変位ベクトルを表す。 $\{\tilde{Q}\}$ は復元力に関する非線形補正力ベクトル、 $\{\tilde{D}\}$ は減衰力に関する非線形補正力ベクトルで、式(3)で定義される。

$$\begin{aligned} \{\tilde{Q}_{n+1}\} &= [K_0]\{d_{n+1}\} - \{Q_{n+1}\} \\ \{\tilde{D}_{n+1}\} &= [C_0]\{v_{n+1}\} - \{D_{n+1}\} \end{aligned} \quad (3)$$

非線形補正力を導入することで、運動方程式の左辺の係数マトリクスは、解析中は一定となる。次に、($n+1$)ステップの非線形補正力を、 n ステップからの増分量を用いて式(4)のように表記する。

$$\begin{aligned} \{\tilde{Q}_{n+1}\} &= \{\tilde{Q}_n\} + \{\Delta\tilde{Q}_{n+1}\} \\ \{\tilde{D}_{n+1}\} &= \{\tilde{D}_n\} + \{\Delta\tilde{D}_{n+1}\} \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\{\Delta\tilde{Q}_{n+1}\}$ は復元力に関する非線形増分補正力ベクトル、 $\{\Delta\tilde{D}_{n+1}\}$ は減衰力に関する非線形増分補正力ベクトルである。式(4)を式(2)に代入すると、式(5)の運動方程式が得られる。

$$[M]\{a_{n+1}\} + [C_0]\{v_{n+1}\} + [K_0]\{d_{n+1}\} = \{f_{n+1}\} + \{\tilde{Q}_n\} + \{\tilde{D}_n\} + \{\Delta\tilde{Q}_{n+1}\} + \{\Delta\tilde{D}_{n+1}\} \quad (5)$$

($n+1$)ステップの応答を算定する際、式(5)の右辺項のうち外力(第1項)と n ステップの非線形補正力(第2項~第3項)は既知量、($n+1$)ステップの非線形増分補正力(第4項~第5項)は未知量である。

NITI 法は、まず既知量に対する応答を、平均加速度法を用いて式(6)で求める。

$$\begin{aligned} \{d_{n+1}^F\} &= [\bar{K}]^{-1} \left\{ \frac{1}{4} dt^2 (\{f_{n+1}\} + \{\tilde{D}_n\} + \{\tilde{Q}_n\}) \right. \\ &\quad \left. + [M] \left(\{d_n\} + dt\{v_n\} + \frac{1}{4} dt^2 \{a_n\} \right) + [C_0] \left(\frac{1}{2} dt \{d_n\} + \frac{1}{4} dt^2 \{v_n\} \right) \right\} \\ \{v_{n+1}^F\} &= -\{v_n\} + \frac{2}{dt} (\{d_{n+1}^F\} - \{d_n\}) \\ \{a_{n+1}^F\} &= -\{a_n\} + \frac{2}{dt} (\{v_{n+1}^F\} - \{v_n\}) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 dt は時間刻みを示し、各応答ベクトルの右肩添え字 F は式(5)の右辺第1~3項に対する応答であることを示す。 $[\bar{K}]$ は式(7)の動的剛性マトリクスである。

$$[\bar{K}] = [M] + \frac{1}{2} dt [C_0] + \frac{1}{4} dt^2 [K_0] \quad (7)$$

式(6)で求められる応答は、($n+1$)ステップの非線形増分補正力が考慮されていないので、式(1)の運動方程式は満たしていない。

次に、式(5)の右辺第4項の影響を考慮するため、復元力の非線形増分補正力 $\{\Delta\tilde{Q}_{n+1}\}$ に起因する応答を式(8)で求める。

$$\begin{aligned} \{d_{n+1}^Q\} &= \{0\} \\ \{v_{n+1}^Q\} &= [\bar{C}]^{-1} \frac{1}{2} dt \{\Delta\tilde{Q}_{n+1}\} \\ \{a_{n+1}^Q\} &= [\bar{C}]^{-1} \{\Delta\tilde{Q}_{n+1}\} \end{aligned} \quad (8)$$

各応答ベクトルの右肩添え字 Q は、復元力の非線形増分補正力に対する応答であることを示す。 $[\bar{C}]$ は式(9)に示すマトリクスである。

$$[\bar{C}] = [M] + \frac{1}{2} dt [C_0] \quad (9)$$

式(8)は、変位を用いて定式化した中央差分法で、静止している系に衝撃荷重として $\{\Delta\tilde{Q}_{n+1}\}$ が作用したときの応答を求めたものである。式(8)をみると、復元力の非線形増分補正力が作用しても、それに起因した変位 $\{d_{n+1}^Q\}$ は零である。よって式(8)を計算する段階で、変位に関する収束計算は必要なく、復元力の非線形増分補正力は式(6)の $\{d_{n+1}^F\}$ から求められる。復元力の非線形増分補正力が既知量になるので、速度 $\{v_{n+1}^Q\}$ と加速度 $\{a_{n+1}^Q\}$ は式(8)を直接解いて求められる。最後に、式(5)の第5項の影響を考慮するため、減衰力の非線形増分補正力 $\{\Delta\tilde{D}_{n+1}\}$ に起因する応答を、式(10)に示す速度を用いて定式化した中央差分法で求める。

$$\begin{aligned} \{d_{n+1}^D\} &= \{0\} \\ \{v_{n+1}^D\} &= \{0\} \\ \{a_{n+1}^D\} &= [M]^{-1} \{\Delta\tilde{D}_{n+1}\} \end{aligned} \quad (10)$$

各応答ベクトルの右肩添え字 D は、減衰力の非線形増分補正力に対する応答であることを示す。減衰力の非線形増分補正力が作用しても、それに起因した変位 $\{d_{n+1}^D\}$ や速度 $\{v_{n+1}^D\}$ は零である。速度に関する収束計算が必要ないため、式(10)を計算する段階で、減衰力の非線形補正力は既知量になり、加速度 $\{a_{n+1}^D\}$ は式(10)を直接解いて求められる。なお、減衰力の非線形補正力の算定に用いる速度は、式(6)と式(8)の速度を加算したものである。

以上の手続きをまとめると、最終的に($n+1$)ステップの応答は、式(6)と式(8)と式(10)を加算した式(11)で求められる。

$$\begin{cases} \{d_{n+1}\} = \{d_{n+1}^F\} \\ \{v_{n+1}\} = \{v_{n+1}^F\} + \{v_{n+1}^O\} \\ \{a_{n+1}\} = \{a_{n+1}^F\} + \{a_{n+1}^O\} + \{a_{n+1}^D\} \end{cases} \quad (11)$$

ここまで求められた(n+1)ステップの復元力や減衰力及び式(11)の応答値は、式(1)の運動方程式を満足する。

式(6)から式(11)までの計算過程をみると、当該ステップの計算開始時に未知量であった非線形増分補正力は、収束計算することなく求められるので、一連の計算は逐次的に実行できる。また、求解過程において非線形時の剛性マトリクスや減衰マトリクスは参照しないので、それらを再構成する必要はない。式(6)と式(8)では連立一次方程式を1回ずつ、つまり1ステップあたり2回解く必要があるが、式(7)と式(9)は常に一定なので、予め分解しておくことで、それぞれの求解手続きは前進・後退代入のみとなる。

このように NITI 法は、復元力や減衰力が非線形となる時間ステップで応答を求める際、①収束計算が不要であること、②動的剛性マトリクス等の再構築や三角分解が必要ないことの2点により、多自由度系モデルの非線形時刻歴応答解析における計算効率の向上が期待できる時間積分法である。

Ⅲ. 時間積分法の安定性

FEM 解析への適用性を検討するため、時間積分法の安定条件を理論的に求める。多自由度系問題は固有モードを介して1自由度系問題に分解できることから、時間刻みに関する安定性を1自由度系モデルで検討する。線形問題の場合、NITI 法は平均加速度法と等しく、時間刻みに関して無条件安定である。本章では、減衰係数や剛性が初期状態から変動した系を対象に、NITI 法の時間刻みに関する安定性を調べる。変動後の系の運動方程式を式(12)に示す。

$$m a_{n+1} + c v_{n+1} + k d_{n+1} = f_{n+1} \quad (12)$$

ここに、 m は質量、 c は減衰係数、 k は剛性で、減衰係数と剛性は変動後の系の値である。 a, v, d は加速度、速度、変位で f は外力を表す。初期の系からの変動割合を表すパラメータとして、式(13)で定義される減衰係数変動率 ϕ 及び剛性変動率 δ を導入する。

$$\phi = c/c_0 : \text{減衰係数変動率 } (>0) \quad (13)$$

$$\delta = k/k_0 : \text{剛性変動率 } (>0)$$

ここに、 c_0 は初期減衰係数、 k_0 は初期剛性である。 ϕ と δ を用いると式(12)の運動方程式は式(14)になる。

$$m a_{n+1} + \phi \cdot c_0 v_{n+1} + \delta \cdot k_0 d_{n+1} = f_{n+1} \quad (14)$$

式(14)は ϕ と δ $\lambda \neq 0$ を変動させることで、さまざまな非線形問題に対する検討が容易になる。

初期剛性と初期減衰係数で定義された円振動数 ω と減衰定数 h を式(15)で定義する。

$$\omega = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \quad h = \frac{c_0}{2\sqrt{mk_0}} \quad (15)$$

Ⅱ章で示した手順に従うと、隣接する時間ステップの応答量は、式(16)の漸化式で関係づけられる。

$$\begin{Bmatrix} d_{n+1} \\ dt \cdot v_{n+1} \\ dt^2 \cdot a_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\phi, \delta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_n \\ dt \cdot v_n \\ dt^2 \cdot a_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L(\phi, \delta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$[A]$ は Amplification Matrix とよばれ、このマトリクスの固有値から、数値積分の安定性と精度が定まる。 $[L]$ は Load Factor で、外力の作用特性を表す。いずれのマトリクスの成分も、 ϕ 及び δ を含む関数である。ここで式(17)で定義される係数 β_1, β_2 を導入する。

$$\beta_1 = \frac{1+h\omega dt}{1+h\omega dt + \frac{1}{4}\omega^2 dt^2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{1+h\omega dt + \frac{1}{4}\omega^2 dt^2} \quad (17)$$

式(17)を用いると Amplification Matrix は式(18) のようになる。

$$\begin{aligned} [A(\phi, \delta)] &= \frac{1}{1+h\omega dt} \times \\ &\begin{bmatrix} (1+h\omega dt) & \beta_1(1+h\omega dt) & \beta_2(1+h\omega dt) \\ -\frac{1}{2}\delta\omega^2 dt^2 & 1+(1-\phi)h\omega dt - \frac{1}{2}\beta_1\delta\omega^2 dt^2 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta_2\delta\omega^2 dt^2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ a_{31} &= -\delta\omega^2 dt^2 - (1-\phi)h\omega dt \delta\omega^2 dt^2 \\ a_{32} &= -2\phi h\omega dt - \beta_1\delta\omega^2 dt^2 - (1-\phi)h\omega dt(2\phi h\omega dt + \beta_1\delta\omega^2 dt^2) \\ a_{33} &= -\phi h\omega dt - \beta_2\delta\omega^2 dt^2 - (1-\phi)h\omega dt(\beta_2\delta\omega^2 dt^2) \end{aligned} \quad (18)$$

$[A]$ マトリクスの固有方程式を式(19)に示す。

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0 \quad (19)$$

λ は $[A]$ マトリクスの固有値、 $A_1 \sim A_3$ は解析モデルの固有円振動数や減衰定数、解析時間刻み等から定まる係数で式(20)で表される。

$$A_1 = 2 - \frac{\delta\omega^2 dt^2(1+h\omega dt) + 2\phi h\omega dt \left(1+h\omega dt + \frac{1}{4}(1-\delta)\omega^2 dt^2\right)}{(1+h\omega dt) \left(1+h\omega dt + \frac{1}{4}\omega^2 dt^2\right)} \quad (20)$$

$$A_2 = 1 - 2\phi \frac{h\omega dt}{1+h\omega dt} \frac{1+h\omega dt + \frac{1}{4}(1-\delta)\omega^2 dt^2}{1+h\omega dt + \frac{1}{4}\omega^2 dt^2}$$

$$A_3 = 0$$

固有方程式の係数 A_3 が 0 なので、 $\lambda \neq 0$ の場合、固有方程式は λ に関する 2 次方程式になる。固有値は式(21)で求められる。

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right) \quad (21)$$

$[A]$ マトリクスのスペクトル半径を式(22)で定義する。

$$\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \quad (22)$$

時間積分の安定条件は、式(22)のスペクトル半径が 1 以下になることである。ただし、固有方程式が大きき 1 の重根を持つ場合は weak instabilities と呼ばれ除外される。固有方程式の係数を用いて安定条件を表すと、 A_2 の範囲に応じて式(23)のようになる⁸⁾。

$$\begin{aligned} \cdot A_2 = 1 \quad \text{の場合} \quad & -2 < A_1 < 2 \\ \cdot -1 \leq A_2 < 1 \quad \text{の場合} \quad & -(A_2 + 1) \leq A_1 \leq (A_2 + 1) \end{aligned} \quad (23)$$

固有方程式の係数を式(23)に代入し ωdt に関して整理すると、式(24)と式(25)の条件が求められる。剛性変動率 δ で規定される安定条件と、減衰係数変動率 ϕ で規定される安定条件が存在し、各々を満たす必要がある。

剛性変動率 δ による安定条件

$$\begin{aligned} & \cdot \delta \leq 1 \text{ の場合} \quad 0 < \omega dt \leq \infty \\ & \cdot 1 < \delta \text{ の場合} \quad 0 < \omega dt < 2 \left\{ \frac{h}{\delta-1} + \sqrt{\left(\frac{h}{\delta-1}\right)^2 + \frac{1}{\delta-1}} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

減衰係数変動率 ϕ による安定条件

$$\begin{aligned} & \cdot \phi \leq 1 \text{ の場合} \quad 0 < \omega dt \leq \infty \\ & \cdot 1 < \phi \text{ の場合} \quad 0 < \omega dt \leq \frac{1}{h(\phi-1)} \end{aligned} \quad (25)$$

まず、剛性変動率 δ による安定条件である式(24)をみると、安定条件を満たす ωdt の範囲は δ で定まり、 $\delta \leq 1$ の場合は減衰定数に関わらず無条件安定、 $\delta > 1$ の場合は条件安定である。これは、剛性が硬化する場合に安定性が失われることがあるとする文献 7) の指摘に合致している。Fig.1 に式(24)の安定限界 ωdt - 剛性変動率関係を示す。 $\delta > 1$ の場合の安定条件は、 δ が大きくなると厳しくなり、減衰が大きくなると緩やかになる特性を有する。

次に、減衰係数変動率 ϕ による安定条件である式(25)をみると、式(24)と同じく、安定条件を満たす ωdt の範囲は ϕ で定まり、 $\phi \leq 1$ の場合は減衰定数に関わらず無条件安定、 $\phi > 1$ の場合は条件安定である。Fig.2 に式(25)の安定限界 ωdt - 減衰係数変動率関係を示す。特筆すべきは、減衰が大きくなると安定条件が厳しくなる特性であり、減衰の付加によって安定条件を緩和させることはできない。

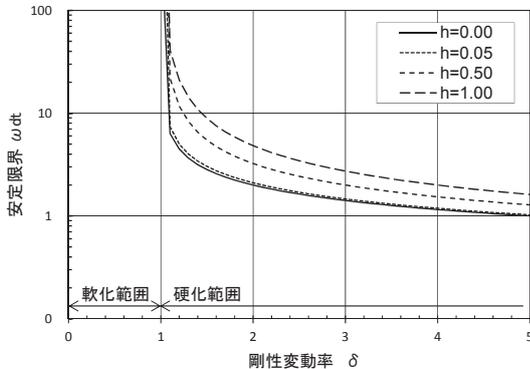


Fig.1 安定限界-剛性変動率関係 (Stability Limit Versus Degree of Stiffness Change)

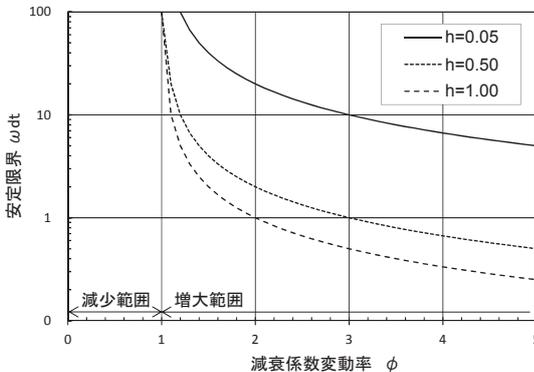


Fig.2 安定限界-減衰係数変動率関係 (Stability Limit Versus Degree of Damping Change)

初期状態から剛性や減衰係数が低下する非線形問題では、NITI法は時間刻みの大きさに関わらず無条件安定である。有限要素モデルは空間を離散化したことにより、高い振動数の固有モードを内含する可能性がある。無条件安定の場合、そのようなモードに対しても時間刻みの制約は課されないため、劣化型の非線形特性を有する有限要素モデルにとって極めて好ましい性質といえる。

IV. 時間積分法の精度

一般に地動入力に対する過渡応答は、減衰自由振動の重ね合わせとみなせるので、減衰自由振動解の特性により時間積分法の精度を評価する。1自由度系の減衰自由振動を対象に、NITI法による解(以下、数値解)の応答周期と減衰定数を求め、理論解と比較する。

減衰自由振動を仮定すると、式(19)に示す固有方程式は複素共役根をもつので、その根は式(26)のように表すことができる。

$$\lambda_{1,2} = A \pm iB = e^{\frac{1}{2} \ln(A^2 + B^2) \pm i \tan^{-1}(B/A)} \quad (26)$$

ここに、 A, B は初期の系の振動特性、時間刻み、減衰係数変動率 ϕ や剛性変動率 δ から定まる値である。1自由度系の減衰自由振動の理論解と比較すると、式(27)と式(28)の関係が得られる。

$$\frac{1}{2} \ln(A^2 + B^2) = -\tilde{h} \tilde{\omega} dt \quad (27)$$

$$\tan^{-1}(B/A) = \tilde{\omega}_D dt \quad (28)$$

ここに、 $\tilde{\omega}$ は非減衰円振動数、 $\tilde{\omega}_D$ は減衰付円振動数、 \tilde{h} は減衰定数で、いずれも数値解の値である。非減衰円振動数と減衰付円振動数は $\tilde{\omega}_D = \sqrt{1-h^2} \tilde{\omega}$ の関係を有する。

時間積分法の相対周期誤差 PE (Relative Period Error) は、理論解の非減衰応答周期を $T (= 2\pi/\omega)$ 、数値解の非減衰応答周期を $\tilde{T} (= 2\pi/\tilde{\omega})$ とすると、式(29)で定義される⁸⁾。

$$PE = \frac{\tilde{T} - T}{T} = \frac{\omega}{\tilde{\omega}} - 1 \quad (29)$$

$PE > 0$ の場合、数値解は理論解より周期が伸びることを示す。また、時間積分の減衰特性を表す指標として、数値減衰比 (Numerical Damping Ratio) を式(30)で定義する⁸⁾。

$$\tilde{h} = -\frac{1}{2\tilde{\omega} dt} \ln(A^2 + B^2) \quad (30)$$

初期の系に対して減衰定数 $h=0.05$ を与えた場合の相対周期誤差と数値減衰比を検討する。ここでは、減衰係数を初期状態に保ちつつ、剛性のみを変動させる。変動範囲は軟化問題を対象に、 $\delta=1.00, 0.10, 0.01$ の3ケースとする。

まず、相対周期誤差-相対時間刻み関係を Fig.3 に示す。ここでは、剛性が δ 倍になった場合、応答周期は初期の系の $1/\sqrt{\delta}$ 倍なることを考慮し、相対時間刻みを $dt/\sqrt{\delta}T$ と定義する。このように横軸をとることにより、剛性が変動した場合でも、変動前の相対時間刻みから容易に誤差を読み取ることができる⁷⁾。

Fig.3 をみると、いずれのケースも相対時間刻みが粗くなると相対周期誤差が増加する。剛性が低下すると相対周期誤差は大きくなり、 $\delta=0.01$ では変動前 ($\delta=1.00$) の周期誤差の2倍近くに達する。ただし、時間刻みを細分することで、改善が可能である。例えば、Fig.3 において相対時間刻みが 0.15 の場合、 $\delta=0.01$ の相対周期誤

差は PE=14% (図中 A) だが、相対時間刻みを 0.11 に変更すると (図中 B)、剛性変動前 (図中 C) の相対周期誤差 (PE=7%) に改善できる。時間刻みをもとの約 0.73 倍にすれば良く、検討した時間刻みの範囲内においては、剛性の低下により増加した相対周期誤差は、時間刻みの細分により平均加速度法 ($\delta=1.00$) の誤差レベルまで改善可能といえる。

数値減衰比-相対時間刻み関係を Fig.4 に示す。なお、剛性を変動させた系の減衰定数 h_e は、初期の系の減衰定数 h から式(31)のように変化する。

$$h_e = \frac{c_0}{2\sqrt{m \delta k_0}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} h \quad (31)$$

そこで、数値減衰比を比較する場合は、初期の系の値に換算することとし、数値減衰比を $\sqrt{\delta}$ 倍して図示する。Fig.4 をみると、 $\delta=1.00$ の場合、相対時間刻みが粗くなると数値減衰比は小さくなり、 $\delta=0.10, 0.01$ の場合、数値減衰比は逆に大きくなる。剛性の低下に応じて精度が低下する訳ではなく、 $\delta=0.01$ での数値減衰比の変動量は、平均加速度法 ($\delta=1.00$) と概ね同等である。

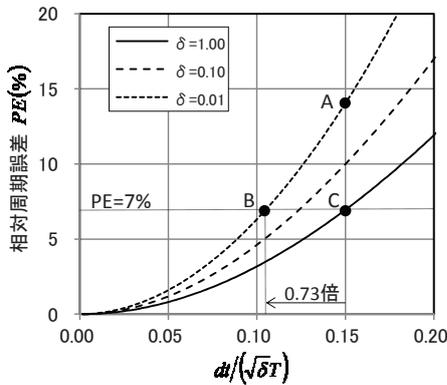


Fig.3 相対周期誤差-相対時間刻み関係 (Variation of Relative Period Error Versus $dt/\sqrt{\delta}T$)

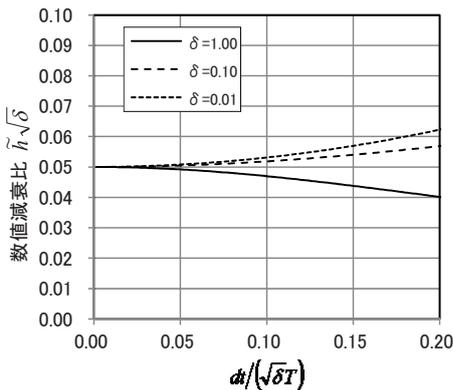


Fig.4 数値減衰比-相対時間刻み関係 (Variation of Numerical Damping Ratio Versus $dt/\sqrt{\delta}T$)

このように、減衰自由振動の場合、NITI 法の解の精度は剛性変動率によって変化する。しかし、検討した相対時間刻みの範囲では、時間刻みを適切に細分することで、変動前つまり平均加速度法と同程度の精度を得られることが分かった。

非線形時刻歴応答解析へ NITI 法を適用するにあたっては、剛性の変動を勘案した上で、有意な振動数 (振動モード) に対して必要

な精度が得られるように、時間刻みを定める必要があると考えられる。

V. 数値計算例

試解析モデルの非線形時刻歴応答解析を行う。既往の時間積分法による結果と比較することで、NITI 法の解の精度や、演算時間の短縮に対する有効性を検討する。

1. 概要

試解析で対象とする建物の概要を Fig.5 に示す。原子力発電所関連施設を想定した壁式鉄筋コンクリート造建物である。水平 2 方向にそれぞれ 7m×3 スパン、高さ方向に階高 6m で 2 階建とする。コンクリートは普通コンクリートで Fc24、鉄筋は SD345 を用いる。壁厚は 1.0m で、鉄筋は鉄筋比 0.3% 2 段を 2 方向を考慮する。床は厚さ 0.7m で、弾性として取り扱い、鉄筋は考慮しない。重量は鉄筋コンクリートの自重に加え、1 次周期が約 0.1 秒となるよう、各階床レベルに付加質量を考慮する。

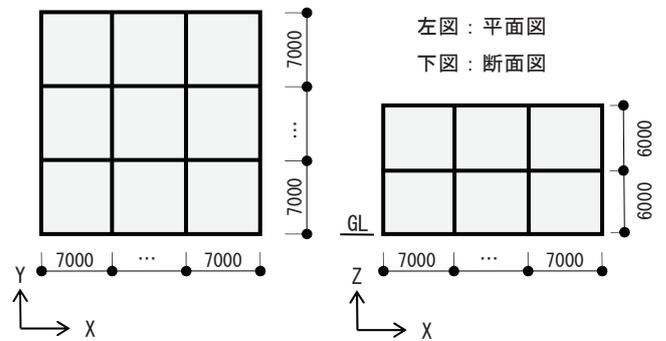


Fig.5 建物の概要 (Overview of Building)

試解析の解析モデルを Fig.6 に示す。メッシュサイズは各方向ともに 1.0m とし、モデル全体の節点数は 3052、シェル要素数は 3339 である。壁は非線形積層シェル要素、床と基礎スラブは弾性シェル要素でモデル化する。なお、壁のモデル化に用いる非線形積層シェル要素の詳細は文献 9) を参照されたい。質量マトリクスは各節点の支配領域に応じた集中質量型とする。境界条件は、基礎スラブの各節点をピン支持とする。

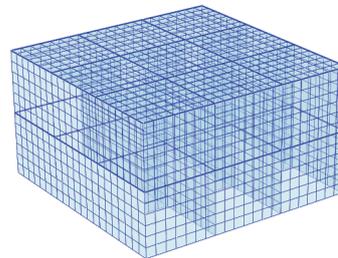


Fig.6 解析モデル (Analytical Model)

解析モデルの固有周期を Table 1 に示す。1 次周期は水平方向の並進モードで 0.102 秒である。減衰マトリクスは 1 次周期に対して $h=0.05$ を与える初期剛性比例型で、解析中は一定とする。

Fig.7 に入力地震動と加速度応答スペクトル ($h=0.05$) を示す。最大加速度を 2000Gal に基準化した告示波 (ランダム位相) で、継続時間 20 秒を X 方向に入力する。

Table 1 固有周期一覧
(List of Natural Period)

次数	固有周期	刺激係数		
	(sec)	β_x	β_y	β_z
1	0.102	1.080	0.489	0.000
2	0.102	0.489	1.080	0.000
3	0.082	0.000	0.000	0.000
4	0.057	0.000	0.000	0.000
5	0.045	0.046	-0.129	0.000
...				
最高次数	1.03×10^{-3}	0.000	0.000	0.029

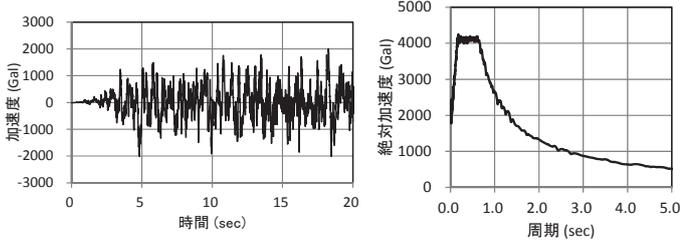


Fig.7 入力地震動と応答スペクトル
(Input Motion and Response Spectrum)

2. 解析ケース

NITI 法は陰解法と陽解法を組み合わせた時間積分法であることから、平均加速度法や衝撃加速度法 (Newmark- β 法, $\beta=0, \gamma=1/2$) との比較を試みる。平均加速度法は、初期剛性を用いた修正 Newton 法を採用し、各時間ステップで係数行列の分解は行わない。収束判定には各節点の残差力つまり内外力差を用いる。反復回数は最大 5 回/ステップとし、収束しない場合は残差力を次ステップに持ち越す。

3. 時間刻み

NITI 法の周期特性や減衰特性は時間刻みの影響を受けるので、十分細かい時間刻みを用いる必要がある。しかし、実際はむやみに細かくできないので、実用上の精度を勘案した上で時間刻みを定めることになる。

Fig.8 に減衰定数 $h=0.05$ の場合の相対周期誤差を示す。相対時間刻みが 1.0×10^{-1} では、 δ に応じて 3~7% 程度の誤差があるのに対し、相対時間刻みが 1.0×10^{-2} 以下では有意な誤差は認められない。Fig.9 に示す数値減衰比も同様の傾向であり、相対時間刻みが 1.0×10^{-2} 以下の誤差は僅少と判断できる。よって本試解析では、Table 1 の固有周期や刺激係数を勘案し、周期 0.040sec に対して相対時間刻みが 1.0×10^{-2} となるように、つまり $dt=4.0 \times 10^{-4}$ sec とする。平均加速度法は、相対周期誤差や数値減衰比は Fig.8~9 の $\delta=1.0$ に相当することから、NITI 法と同じ時間刻みを用いることとする。

一方、衝撃加速度法は時間刻みに関して条件安定であり、式(32)に示す安定条件を満足する必要がある。

$$dt \leq \frac{T_N}{\pi} \tag{32}$$

ここに T_N は解析モデルの最小固有周期を表す。試解析モデルの場合、固有値解析から求められた最小固有周期は 1.03×10^{-3} sec で、式(32)を満たす時間刻みは、 $dt \leq 3.27 \times 10^{-4}$ sec である。NITI 法や平均加速度法で用いる時間刻み ($=4.0 \times 10^{-4}$ sec) では安定条件を満足していないため、それを 2 分割した時間刻み $dt=2.0 \times 10^{-4}$ sec を用いる。つまり、解析ステップ数は NITI 法や平均加速度法の 2 倍になる。

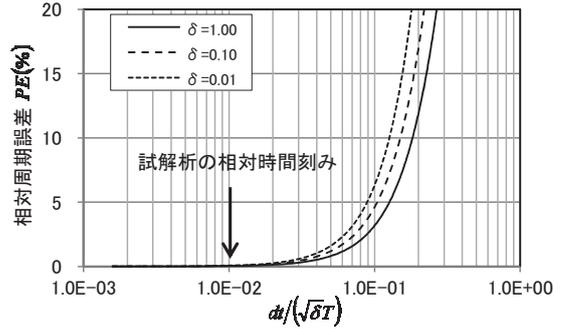


Fig.8 相対周期誤差—相対時間刻み関係
(Variation of Relative Period Error Versus $dt/\sqrt{\delta T}$)

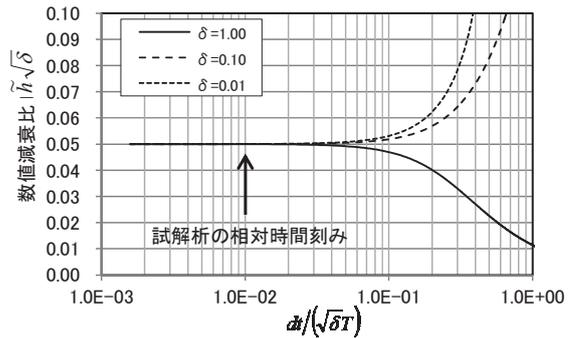


Fig.9 数値減衰比—相対時間刻み関係
(Variation of Numerical Damping Ratio Versus $dt/\sqrt{\delta T}$)

4. 応答結果の比較

NITI 法の応答結果を平均加速度法や衝撃加速度法と比較し、解の精度を確認する。Fig.10 に荷重—変形関係を示す。荷重は減衰力を含まない固定点反力を合計したもので、変形は地表面に対する建物の屋根中央位置の相対変位である。平均加速度法や衝撃加速度法と NITI 法を比較すると、形状に違いがほとんど見られないことから、全体的な挙動は概ね合致していると判断できる。建物の屋根中央位置の応答加速度波形 (Fig.11) を比較すると、ほぼ合致しており平均加速度法と NITI 法の最大値の差異は約 0.7% である。

次に、最も塑性化が進んでいる 1 階外壁下部の縦筋の応力—ひずみ関係を Fig.12 に示す。全体形状に大きな違いはなく、最大ひずみを比較すると、平均加速度法は 3.995×10^{-3} 、衝撃加速度法は 4.052×10^{-3} 、NITI 法は 4.033×10^{-3} で、平均加速度法と NITI 法の差異は約 1.0% である。

以上から、平均加速度法や衝撃加速度法と NITI 法の応答結果を比較すると、全体挙動は概ね合致していると判断できる。要素レベルで比較すると、最も塑性化が進んでいる鉄筋の挙動は概ね合致していることが確認できた。

5. 演算時間の比較

演算時間の比較は、3.60GHz の演算速度を有する CPU のシングルコアで計算した時間測定結果を用いる。各解析ケースの演算時間と演算回数を Table 2 に、演算時間の内訳の概要を Fig.13 に示す。

まず NITI 法と平均加速度法の演算時間を比較すると、全演算時間は NITI 法は平均加速度法の 42% で、両法ともに後退代入と要素応力・内力が大半を占める。そこで、後退代入と要素応力・内力の実行回数に着目すると、平均加速度法はいずれも総反復数 ($=173285$) であるのに対し、NITI 法は後退代入が解析ステップ数 ($=50000$) の 2 倍、要素応力・内力が解析ステップ数である。つま

り, NITI 法は収束計算の代替として後退代入を必要とするが, その実行回数は1ステップあたり高々1回なので, 収束計算を複数回行う平均加速度法よりも演算時間が短かったといえる。

次に, NITI 法と衝撃加速度法の演算時間を比較する。全演算時間はNITI 法は衝撃加速度法の67%であった。衝撃加速度法はもともと収束計算を必要としないので, 1解析ステップあたりの演算量はNITI 法よりも少なく, 解析ステップ数が同じであれば全演算時

間は短くなる。しかし, 衝撃加速度法は式(32)の安定条件を満たさせるため, 解析ステップ数がNITI 法の2倍であり, その結果として演算時間が伸長している。一方, NITI 法は時間刻みに関する安定条件が課されないで, このようなことはない。

以上から NITI 法は, 平均加速度法の安定性の高さ, 衝撃加速度法の収束計算を必要としないという特長を兼ね備えていることで, 試験解析モデルの演算時間を短縮できたことが分かる。

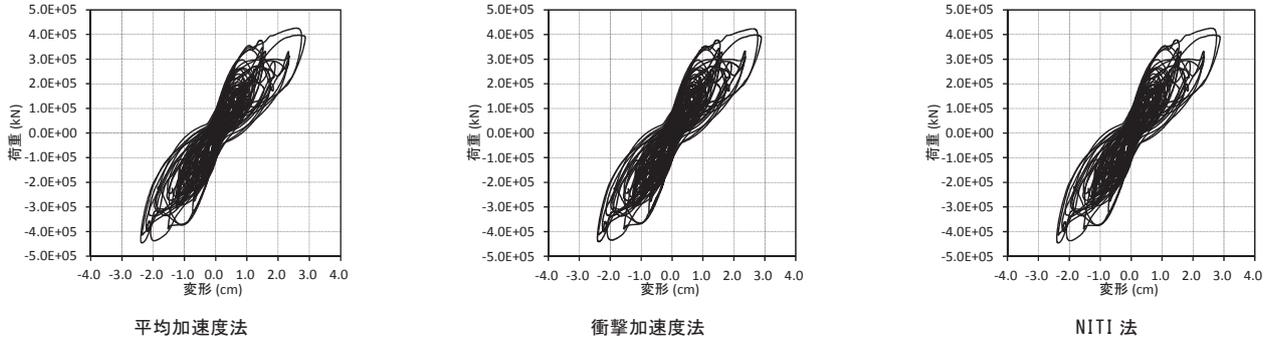


Fig.10 荷重-変形関係 (Restore Force Versus Deformation)

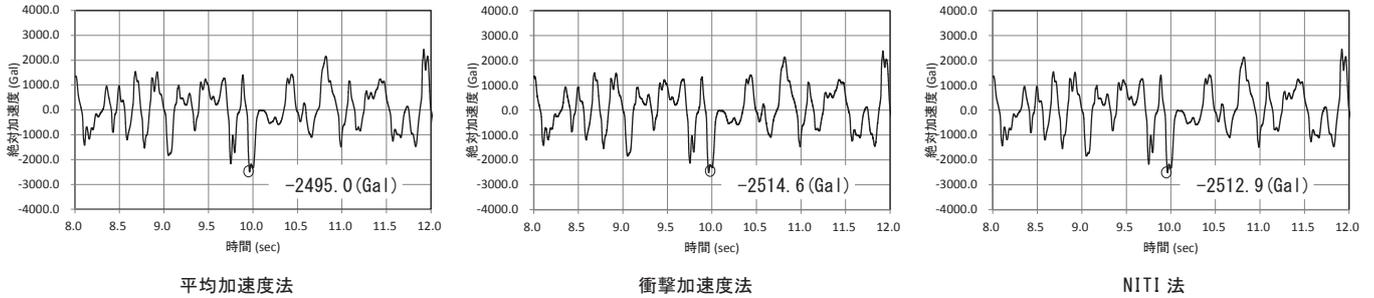


Fig.11 応答加速度波形 (Acceleration Response)

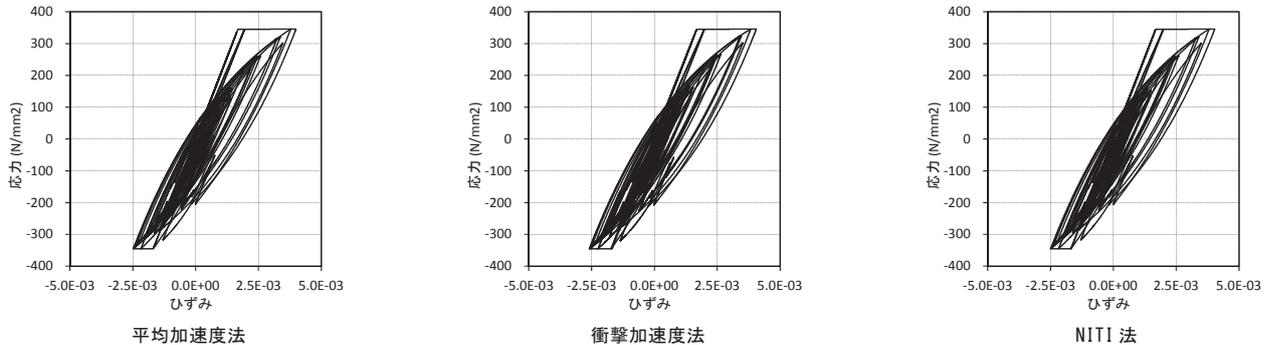


Fig.12 鉄筋の応力-ひずみ関係 (Stress Strain Relationship of Reinforced Bar)

Table 2 演算時間と演算回数 (Computation Time and Number of Operations)

	平均加速度法		衝撃加速度法		NITI法	
	時間 (sec)	回数	時間 (sec)	回数	時間 (sec)	回数
全体	12144	-	7654	-	5134	-
後退代入	3321	173285	1930	100000	2098	100000
要素応力・内力	8021	173285	4478	100000	2327	50000
その他	802	-	1246	-	709	-

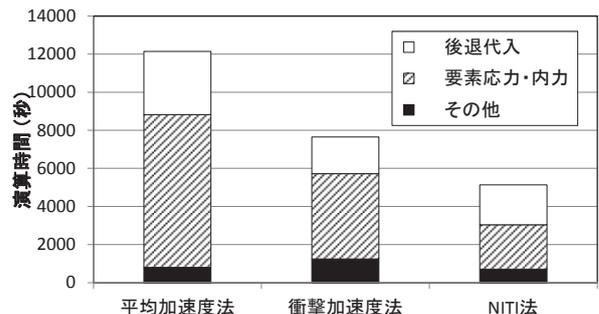


Fig.13 演算時間の内訳 (Details of Computation Time)

VI. まとめ

有限要素法を用いた非線形時刻歴応答解析の高速化を図るため、非反復型の時間積分法である NITI 法に着目し、その適用性を検討した。本研究を通して、次のことが分かった。

- ① NITI 法の時間刻みに関わる安定条件を理論的に求めた。それによると、剛性や減衰係数が初期状態から低下する軟化問題では時間刻みに関して無条件安定である。劣化型の非線形特性を有する構造物の非線形時刻歴応答解析では、解の安定性は保証される。一方、硬化問題では時間刻みに関して条件安定であり、この特性は文献 7) の知見に合致している。
- ② 減衰自由振動を対象に、NITI 法による解の精度を表す指標として周期特性（相対周期誤差）と減衰特性（数値減衰比）を求めた。剛性が変動した程度に応じて解の周期特性や減衰特性は変化するが、時間刻みを適切に細分することで、平均加速度法と同程度の精度を得ることが可能である。
- ③ 2 層壁式鉄筋コンクリート造建物の非線形時刻歴応答解析を行い、修正 Newton 法を用いた平均加速度法や衝撃加速度法と解析結果を比較した。時間刻みが十分細かい場合、全体挙動および塑性化が最も進展した鉄筋の挙動が概ね合致したことを確認した。演算時間を比較すると、NITI 法の演算時間は平均加速度法の約 42%、衝撃加速度法の約 67%であった。演算時間の内訳を分析したところ、NITI 法は、平均加速度法の安定性の高さと、衝撃加速度法の収束計算を必要としないという特長を兼ね備えていることで、試解析モデルの演算時間を短縮できたことが分かった。

本論では、剛性のみが劣化する建物モデルについて、試解析を実施して適用性を確認した。今後は、減衰係数が変動する問題への適用性を検討するとともに、さらに、大規模な解析モデルでの演算時間の短縮効果を確認していきたい。

参考文献

- 1) M. Ohsaki, et al. ; High-precision finite element analysis of elastoplastic dynamic responses of super-high-rise steel frames, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 38, 2009, pp.635-654.
- 2) N.M. Newmark ; A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE.*, Vol.85, 1959, pp.67-94.
- 3) H.M. Hilber and T.J.R. Hughes ; Collocation Dissipation and Overshoot for Time Integration Schemes in Structural Dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.6, 1978, pp.99-118.
- 4) K.J. Bathe ; *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- 5) 中島正愛, 石田雅利, 安藤和博 ; サブストラクチャ仮動的実験のための数値積分法, *日本建築学会構造系論文報告集*, 第 417 号, 1990.11, pp.107-117.
- 6) 山田有孝, 三浦賢治 ; 異種の基礎を併用した構造物の弾塑性地震応答性状, *日本建築学会構造系論文集*, 第 529 号, 2000.3, pp.113-119.
- 7) Riki Honda, Hisakazu Sakai and Sumio Sawada ; Non-iterative time integration scheme for non-linear dynamic FEM analysis, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.33, 2004, pp.111-132.
- 8) T. Belytschko and T.J.R. Hughes ; *Computational methods for transient analysis*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1983.
- 9) 森川博司ほか ; 繰返し荷重を受ける鉄筋コンクリート構造物の非線形解析, *鹿島技術研究所年報*, 第 54 号, 2006.9, pp.57-62.

Evaluation of Applicability of Non-Iterative Time Integration Method to Nonlinear FEM Analysis

Toshihiro Koiso

In order to improve the computational efficiency of the non-linear dynamic response analysis of finite element model, the author examined the applicability of non-iterative time integration method (NITI method). First, the stability condition and accuracy of the NITI method were evaluated. The results revealed that the NITI method was unconditionally stable in the stiffness degradation problem. This is an important property suitable for general non-linear problems. The accuracy of the NITI method in the case of short time increments was equivalent to that of the average acceleration method. Next, as a numerical example, non-linear response analysis of reinforced concrete building was performed. In comparison with the average acceleration method and the impulse acceleration method, response results were almost the same and furthermore computation time was about 42% to 67%. From these results, it was verified that this method was effective to improve the computational efficiency of the non-linear response analysis.