

複数浮体の波浪動揺解析

Wave Response Analysis for Multiple Floating Bodies

高橋 俊彦 岩前 伸幸¹⁾ 福山 貴子
秋山 義信 池谷 毅

要 約

海上工事においては、安全確保や施工精度向上のため、作業船の動揺量を把握する必要がある。作業船の周りに防波堤、岸壁、他の作業船等が配置される実際の施工時を対象とする場合、構造物や浮体間の相互干渉が非常に重要となるため、複数浮体を同時に扱える動揺解析手法が不可欠となる。単一浮体の動揺解析手法は、線形ポテンシャル理論の範疇ではほぼ確立されており、原理的にはそれを複数浮体へ拡張することも可能である。

本論文では、単一浮体の動揺解析手法の定式化を詳述するとともに、その自然な拡張によって複数浮体へも適用可能であることを示す。それに基づいて開発された複数浮体動揺解析の計算例を紹介し、その妥当性を検討する。

目 次

- I. はじめに
- II. 浮体の波浪動揺解析
- III. 数値計算例
- IV. おわりに

I. はじめに

海上工事においては、安全確保や施工精度向上のため、作業船の動揺量を精度良く評価することが非常に重要である。特に、沿岸部での工事では、作業船の周りに防波堤、岸壁、他の作業船等が配置される場合が想定され、着底構造物による反射や回折、複数の作業船の相互干渉等の影響も考慮する必要がある。

波浪中の浮体動揺に関する研究は、1970年代から盛んに行われ、単一浮体については既に幾つかの実用的な手法が提案されている¹⁾。その中で、流体の非粘性、非圧縮性および運動の非回転の仮定の下、線形ポテンシャル理論に基づく境界値問題を解くグリーン関数法は、代表的かつ実用的な手法の一つである。グリーン関数法においては、グリーン関数およびその微分を精度良くかつ効率的に評価することが最重要課題であり、著者らの一人は精巧な数値計算法を提案し、その有効性を確認している^{2), 3)}。本数値計算法を組み込んだ解析プログラムは、WALK-G(Wave Loads Acting on Large Offshore Structures at Kajima - Green Function Method)と名付けられ、鹿島で長年使用されてきており、数多くの実績を有している。

本論文では、その単一浮体の動揺解析手法を複数浮体に適用することを考える。単一浮体の動揺解析手法の定式化を詳述するとともに、線形ポテンシャル理論に基づく境界値問題を解くグリーン関数法の枠組みで、複数浮体に対する動揺解析手法が自然に導かれるこ

とを示す。それに基づいて開発された複数浮体動揺解析の計算例を紹介し、その妥当性を検討する。

II. 浮体の波浪動揺解析

1. 単一浮体動揺解析

Fig.1 に示すように、一定水深 h の海域に任意形状の 3 次元浮体があるものとする。座標系は静水面上に x, y 軸、鉛直上向きに z 軸をそれぞれ定義する。浮体は剛体であるとし、角周波数 ω の規則波による 6 自由度の微小な定常運動を考えることにする。流体は非粘性かつ非圧縮で、その運動は非回転であると仮定すると、速度ポテンシャル Φ が存在する(詳細は付録 I を参照されたい)。すべての応答が線形で調和振動であると仮定すると、速度ポテンシャル Φ は変数分離された以下の式で表現される。

$$\Phi(x, y, z; t) = \phi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (1)$$

ここで、 $\phi(x, y, z)$: 速度ポテンシャルの空間部分、 ω : 角周波数、 t : 時間である。

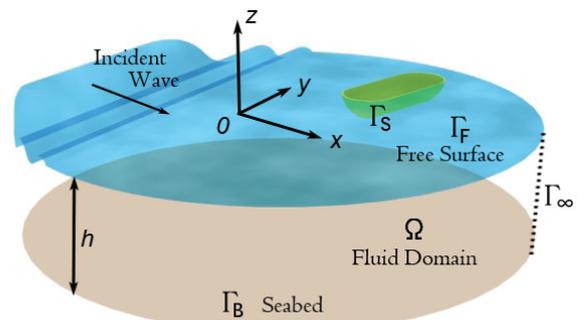


Fig.1 解析座標系 (単一浮体)

(Definitions of Analytical Model for One Floating Body)

1) 北海道支店 Hokkaido Branch

キーワード: 複数浮体, 波浪動揺解析, 線形ポテンシャル理論, 境界値問題, グリーン関数法

Keywords: multiple floating bodies, wave response analysis, linear potential theory, boundary value problems, Green function method

このとき Diffraction 問題, Radiation 問題は, それぞれ以下で与えられる。これらの誘導の詳細については, 付録 I を参照されたい。

(1) Diffraction 問題

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$-\frac{\omega^2}{g} \cdot \phi_s + \frac{\partial \phi_s}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z=0) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z=-h) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_S \quad (5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial r} - ik \phi_s \right) = 0 \quad (6)$$

ここで, ϕ_s : 散乱波の速度ポテンシャルの空間部分, ϕ_i : 入射波の速度ポテンシャルの空間部分, ω : 角周波数, g : 重力加速度, n : 法線方向単位ベクトルで, $n(x, y, z) = [n_x, n_y, n_z]^T$ である。

(2) Radiation 問題

$$\frac{\partial^2 \phi_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

$$-\frac{\omega^2}{g} \cdot \phi_l + \frac{\partial \phi_l}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z=0) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z=-h) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial n} = -i\omega n_l \quad \text{on } \Gamma_S \quad (10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_l}{\partial r} - ik \phi_l \right) = 0 \quad (11)$$

ここで, ϕ_l : 浮体運動に関する速度ポテンシャルの空間部分, $l(=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ は 6 成分のインデックスで, それぞれ 1 : x 軸方向並進運動, 2 : y 軸方向並進運動, 3 : z 軸方向並進運動, 4 : x 軸回り回転運動, 5 : y 軸回り回転運動, 6 : z 軸回り回転運動, ω : 角周波数, g : 重力加速度である。なお, n_l は以下で与えられる。

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ n_y(z-G_z) - n_z(y-G_y) \\ n_z(x-G_x) - n_x(z-G_z) \\ n_x(y-G_y) - n_y(x-G_x) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$G = [G_x, G_y, G_z]^T$: 静止時の浮体運動回転中心である。

(3) Green 関数

式(2)~(4)と式(6)あるいは式(7)~(9)と式(11)に着目して, 以下の方程式および境界条件を満たす Green 関数 G を考える。

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -\delta(x-\xi) \cdot \delta(y-\eta) \cdot \delta(z-\zeta) \quad \text{in } \Omega \quad (13)$$

$$-\frac{\omega^2}{g} \cdot G + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z=0) \quad (14)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z=-h) \quad (15)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial G}{\partial r} - ikG \right) = 0 \quad (16)$$

ここで, δ は Dirac のデルタ関数である。

式(13)~(16)を満たす Green 関数 G は, 以下で与えられる⁴⁾。

$$\begin{aligned} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) &= \frac{i}{2} \cdot \frac{k^2 - \nu^2}{(k^2 - \nu^2)h + \nu} \cdot \cosh k(h+z) \cdot \cosh k(h+\zeta) \cdot H_0^{(1)}(kr) \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 + \nu^2}{(k_n^2 + \nu^2)h - \nu} \cdot \cos k_n(h+z) \cdot \cos k_n(h+\zeta) \cdot K_0(k_n r) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで, k は波数, k_n は固有値でそれぞれ,

$$k \cdot \tanh kh = \frac{\omega^2}{g} \quad (18)$$

$$-k_n \cdot \tanh k_n h = \frac{\omega^2}{g} \quad (0 < k_1 < k_2 < \dots) \quad (19)$$

の実正根, $H_0^{(1)}$ は 0 次の第 1 種 Hankel 関数, K_0 は 0 次の第 2 種変形 Bessel 関数,

$$\nu = \frac{\omega^2}{g} \quad (20)$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \quad (21)$$

である。

(4) 境界積分方程式

速度ポテンシャルの空間部分および Green 関数に対して, 拡張された Green の定理を流体領域 Ω に適用すると以下の積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot \phi(x, y, z) &= \iint_{\Gamma_S} \phi(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{\partial G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)}{\partial n(\xi, \eta, \zeta)} d\Gamma(\xi, \eta, \zeta) \\ &- \iint_{\Gamma_S} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \cdot V_n(\xi, \eta, \zeta) d\Gamma(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで, V_n は式(5)あるいは式(10)の右辺である。

浮体没水表面 Γ_S を N 個のパネルに分割し, 各パネル内で速度ポテンシャルの空間部分 $\phi(x, y, z)$ は一定であると仮定すると, 式(22)は以下の複素係数連立 1 次方程式に帰着される。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j) \cdot \phi(x_j, y_j, z_j) \\ = \sum_{j=1}^N \beta(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j) \cdot V_n(x_j, y_j, z_j) \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, (x_j, y_j, z_j) : 離散化されたパネル ΔS_j の中心(代表)点,

$$\begin{aligned} \alpha(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j) &= \begin{cases} \iint_{\Delta S_j} \frac{\partial G(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j)}{\partial n(x_j, y_j, z_j)} d\Gamma(x_j, y_j, z_j) & (i \neq j) \\ \frac{1}{2} + \iint_{\Delta S_j} \frac{\partial G(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j)}{\partial n(x_j, y_j, z_j)} d\Gamma(x_j, y_j, z_j) & (i = j) \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \beta(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j) &= \iint_{\Delta S_j} G(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j) d\Gamma(x_j, y_j, z_j) \end{aligned} \quad (25)$$

である。したがって, 行列とベクトルで表現すると,

$$[ST]\{\phi\} = [G]\{V_n\} \quad (26)$$

となる。 $[ST]$, $[G]$ は $N \times N$ 行列, $\{\phi\}$, $\{V_n\}$ は N 次元ベクトルである。

式(26)の複素係数連立 1 次方程式を解くことによって, 浮体没水表面を分割した各パネルにおける速度ポテンシャルの空間部分が求められるが, そのためには, 式(24), 式(25)よりそれぞれ α と β を計算しておく必要がある。著者らの一人は, 圧縮性を考慮した場合も含めて, それらを精度良く求める精巧な数値計算法を提案し, その有効性を確認している^{2), 3)}。本数値計算法の解説は, 紙面の都合上割愛するが, 後者で詳細に記載されているので参照されたい。

Diffraction 問題および Radiation 問題の動揺 6 成分に対応して、計 7 種類の式(26)が導かれ、各々の速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_s , ϕ_l ($l=1,2,3,4,5,6$) が求まると、浮体没水表面の N 個のパネル上で積分することによって、浮体に作用する力が評価される。波強制力の 6 成分に対応する 6 次元ベクトル、動揺 6 成分同士で作用しあう力に起因する付加質量、造波減衰の 6×6 行列がそれぞれ求められる (詳細については付録Ⅲを参照されたい)。波強制力、付加質量、造波減衰が得られると、調和振動の仮定の下で得られる以下の 6 元の複素係数連立 1 次方程式を解くことによって、静止時の浮体運動回転中心での変位が求められる。

$$[-\omega^2(M+m) - i\omega C + K]\{X\} = \{F\} \quad (27)$$

ここで、 ω : 角周波数, M : 質量行列, m : 付加質量行列, C : 造波減衰行列, K : 静的復元力行列, X : 浮体運動回転中心での変位ベクトル, F : 波強制力ベクトルである。

2. 複数浮体動揺解析

最初に、Fig.2 に示すとおり、一定水深 h の海域に任意形状の 3 次元浮体が二つある場合を考え、便宜上それらに 1, 2 の添え字を付ける。座標系、速度ポテンシャル等の定義は、単一浮体の場合と全く同様とする。浮体没水表面 Γ_{s1}, Γ_{s2} をそれぞれ N_1, N_2 個のパネルに分割し、各パネル内で速度ポテンシャルの空間部分 $\phi(x,y,z)$ は一定であると仮定すると、解くべき複素係数連立 1 次方程式は、単一浮体に対する式(26)の自然な拡張として、以下で与えられる。

$$\begin{bmatrix} ST_{11} & ST_{12} \\ ST_{21} & ST_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (V_n)_1 \\ (V_n)_2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

ここで、マトリックスの各成分は式(24)と式(25)から求められる。

速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_1, ϕ_2 を求め、浮体没水表面 Γ_{s1}, Γ_{s2} のそれぞれ N_1, N_2 個のパネル上で積分することによって、波強制力の 6 成分に対応する 6 次元ベクトル、動揺 6 成分同士で作用しあう力に起因する付加質量、造波減衰の 6×6 行列が浮体 1, 2 についてそれぞれ二つずつ求められる。したがって、運動方程式についても式(27)の自然な拡張として、以下の 12 元の複素係数連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} -\omega^2(M_{11}+m_{11}) - i\omega C_{11} + K_{11} & -\omega^2(M_{12}+m_{12}) - i\omega C_{12} + K_{12} \\ -\omega^2(M_{21}+m_{21}) - i\omega C_{21} + K_{21} & -\omega^2(M_{22}+m_{22}) - i\omega C_{22} + K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

を解くことによって、それぞれ浮体 1, 2 に対する動揺 6 成分の静止時の浮体運動回転中心での変位が求められる。

以上から明らかなように、浮体の数が三つ以上になった場合でも、二浮体と全く同様に、解くべき複素係数の連立 1 次方程式の元数を上げていけば良いことがわかる。すなわち、式(28)と同様に、式(26)を拡張した複素係数連立 1 次方程式を解いて、すべての浮体の各パネルにおける速度ポテンシャルの空間部分を求めた上で、式(29)と同様に、式(27)を拡張した複素係数連立 1 次方程式を解くことによって、各浮体の静止時の浮体運動回転中心での変位が求められる。

浮体数が非常に多い場合、分割するパネル数が増え、計算時間、計算容量等の負荷も増大する点が指摘されていたが、近年の計算機能力の向上によって、実際の海上工事へ適用する範囲ではほとんど問題にならないと考えられる。また、防波堤、岸壁、橋脚基礎等の着底式構造物が含まれる場合でも、それら自身の動揺に係る Radiation 問題を解かないだけで同様の扱いが可能となる。

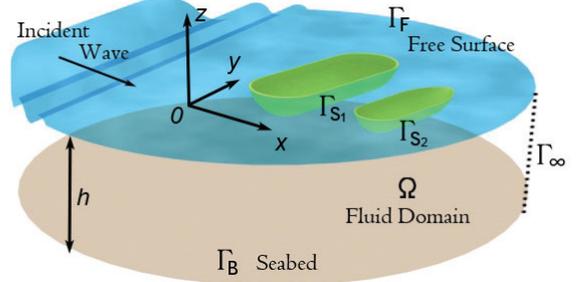


Fig.2 解析座標系 (二浮体)

(Definitions of Analytical Model for Two Floating Bodies)

Ⅲ. 数値計算例

1. 三浮体

本複数動揺解析手法の妥当性を検証するため、Fig.3 に示すように、一定水深 20m の海域に三つの浮体が並んでいる場合を対象とする。浮体没水部分の形状はすべて $20\text{m} \times 20\text{m} \times 10\text{m}$ の直方体であり、入射波は単位振幅(1m)で、 y 軸の負から正の方向に進行 (付録Ⅱにおける入射角度 $\alpha=90^\circ$ に対応) するものとし、周期 3~15 秒(0.5 秒刻み)に対して、各浮体の運動回転中心での変位を計算した。浮体 1, 2, 3 の並進運動、回転運動の応答変位は、それぞれ Fig.4~6 に示すとおりである。浮体 1, 3 については、対応する位相差も Fig.7~8 に示すとおりである。凡例について、 X, Y, Z は x, y, z 軸方向並進運動, R_x, R_y, R_z は x, y, z 軸回り回転運動にそれぞれ対応している。3Bodies が付いているのが三浮体を考慮した結果、付いていないのは単一浮体のみに対する結果で、比較のために掲載している。

Fig.4~6 より、浮体 1, 2, 3 の応答変位は概ね一致しているが、浮体 1, 3 については、浮体 2 の影響で x 軸方向, y 軸回りの成分が生じている。浮体 1, 3 は浮体 2 を中心に y 軸に関して対称の位置にあり、応答変位は完全に一致しているが、Fig.7~8 より x 軸方向並進運動, y 軸回り回転運動の位相差は 180° ずれており、妥当な結果といえる。紙面の都合上割愛するが、入射角度を色々変えたシリーズ計算も行い、いずれも妥当な結果が得られることを確認している。なお、 x 軸回り回転運動に関して、固有周期は 8 秒付近で、単一浮体と三浮体の場合で差は見られず、後者で生じる浮体 1 と 3 の y 軸回り回転運動の固有周期も 8 秒付近となっている。

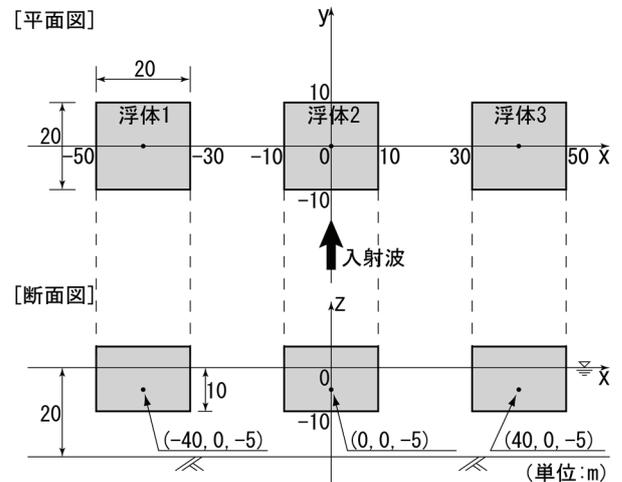


Fig.3 解析モデル (三浮体)

(Analytical Model for Three Floating Bodies)

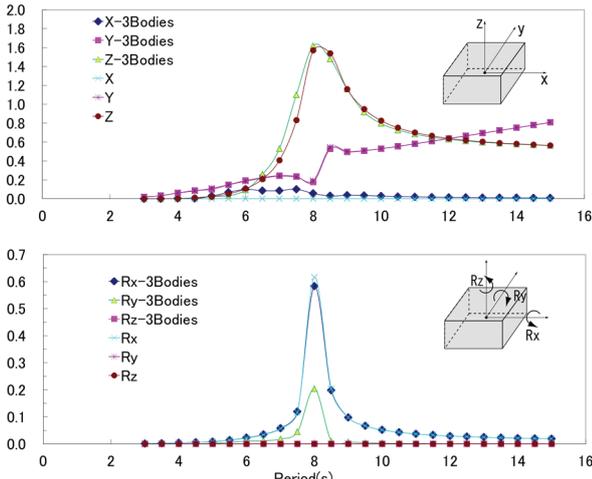


Fig.4 応答変位の振幅 (浮体 1)
(Amplitude Ratios (Floating Body 1))

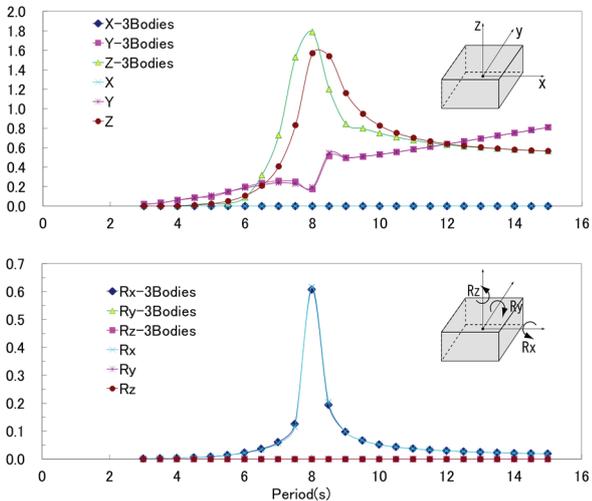


Fig.5 応答変位の振幅 (浮体 2)
(Amplitude Ratios (Floating Body 2))

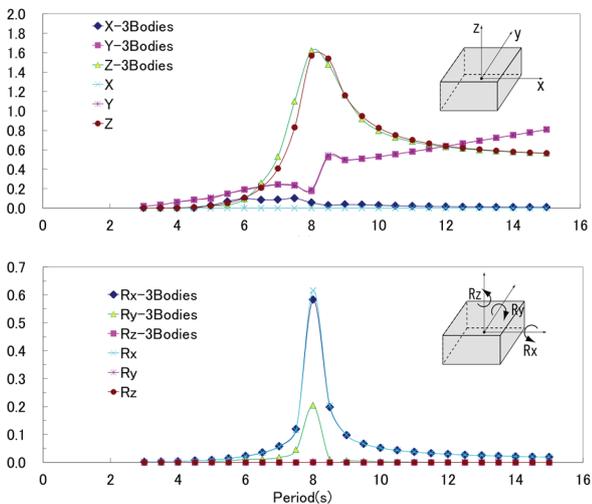


Fig.6 応答変位の振幅 (浮体 3)
(Amplitude Ratios (Floating Body 3))

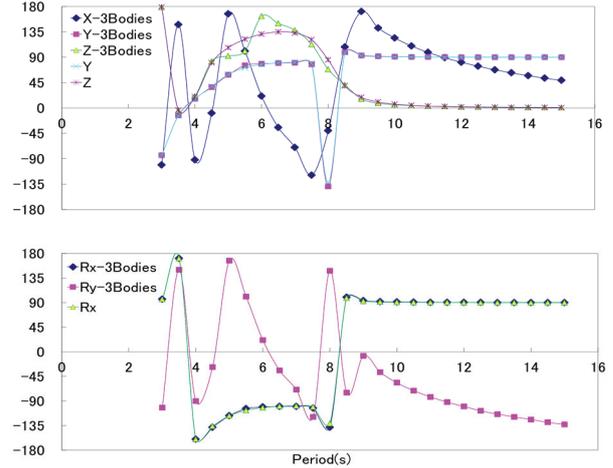


Fig.7 応答変位の位相差 (浮体 1)
(Phases (Floating Body 1))

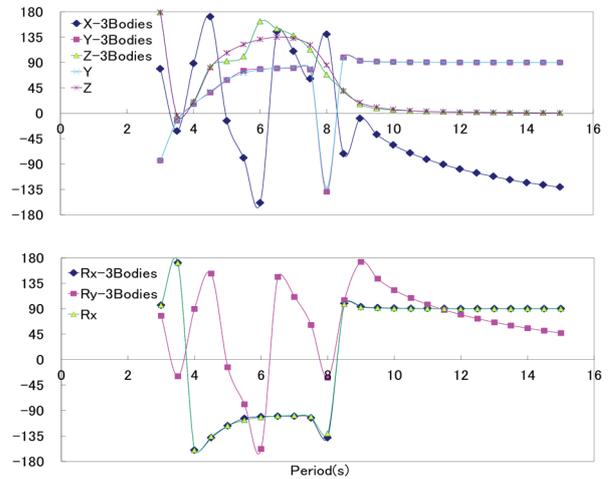


Fig.8 応答変位の位相差 (浮体 3)
(Phases (Floating Body 3))

2. 単一浮体+単一着底構造物

防波堤周辺で台船が作業している状況を想定し、Fig.9 に示すような一定水深 10m の海域で、浮体が着底構造物の前面にある場合を対象とする。浮体没水部分の形状は 10m×10m×5m の直方体とし、防波堤をイメージした着底構造物は 1000m×10m×10m とした。入射波は単位振幅(1m)で、x 軸の正から負の方向に進行 (付録 II における入射角度 $\alpha = 180^\circ$ に対応) するものとし、周期 3~15 秒(0.5 秒刻み)に対して、浮体の運動回転中心での変位を計算した。また、着底構造物からの反射による浮体への影響の度合いを見るため、反射率を 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 と 5 種類設定した。なお、反射率は着底構造物に対してのみ、Diffraction 問題の式(5)の右辺に乗じて、Radiation 問題では影響が小さいため、考慮しないこととした。

Fig.10~12 は、浮体の運動回転中心での x 軸、z 軸方向および y 軸回りの応答変位を示している。比較のため、着底構造物がない場合の結果も掲載している。反射率に応じて応答変位の振幅が変動しており、妥当な結果となっている。ただし、3.5, 4.5, 7 秒付近で x 軸方向と y 軸回りの応答変位の振幅が急激に小さくなっているが、これは入射波と反射波の位相差の関係に起因していると考えられる。

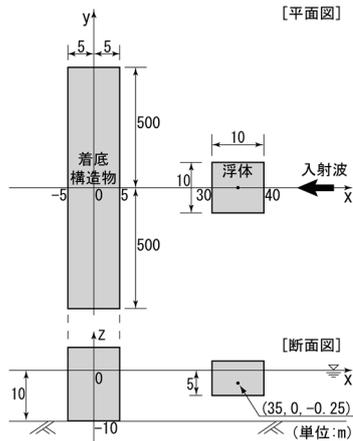


Fig.9 解析モデル (単一浮体+単一着底構造物)

(Analytical Model for One Floating Body and One Breakwater)

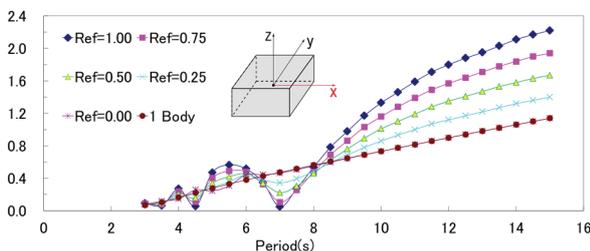


Fig.10 応答変位の振幅 (x軸方向並進運動)
(Amplitude Ratios (Surge))

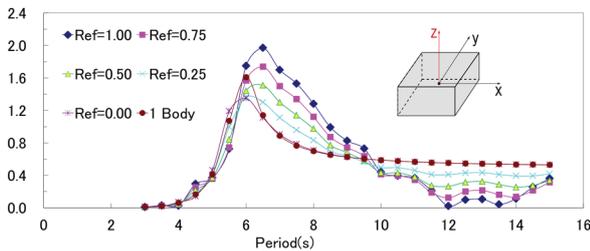


Fig.11 応答変位の振幅 (z軸方向並進運動)
(Amplitude Ratios (Heave))

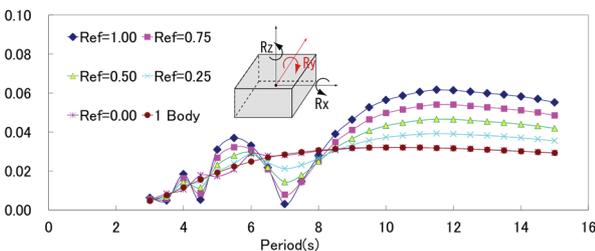


Fig.12 応答変位の振幅 (y軸回り回転運動)
(Amplitude Ratios (Roll))

IV. おわりに

複数浮体の波浪動揺解析手法について詳述するとともに、数値計算例を通して、その妥当性を検討した。本解析手法を実際の海上工事へ適用するためには、水理模型実験、現地計測等を実施し、さらなる検討を行う必要がある。着底構造物周辺での作業船による施工段階を想定し、単一着底円筒構造物と二浮体について水理模型実験を既に実施しており、今後はそれと比較することによって本解析手法の適用性を検討する予定である。

参考文献

- 1) 土木学会海岸工学委員会研究現況レビュー小委員会；海岸波動一波・構造物・地盤の相互作用の解析法一，第IV編 構造物近傍の波動場と波力の計算法，土木学会，1994，pp.291-429.
- 2) 高橋俊彦，阪東浩造；3次元任意形状海洋構造物に作用する地震時動水圧，海岸工学論文集，第43巻，1996，pp.976-980.
- 3) Takahashi, T. and Bando, K.; Hydrodynamic forces acting on arbitrary-shaped offshore structures subjected to seismic excitation, Coastal Engineering Journal, Vol.40, No.2, 1998, pp.207-221.
- 4) John, F.; On the motions of floating bodies I, Comm. Pure Appl. Math. 2, 1949, pp.13-57.
- 5) 今井貫爾，利徳吉彦；浮体動揺解析の現況，鹿島建設技術研究所年報，第33号，1985，pp.49-56.

付録 I：支配方程式の誘導

重力による復元力が卓越する通常の波を記述する方程式を誘導する。流体場を記述する方法として、Eulerの方法とLagrangeの方法がある。前者は物理量を空間に関して記述するもので、独立変数は空間座標の x, y, z と時間 t である。後者は流体粒子について運動を記述するもので、独立変数は流体粒子の初期位置 a, b, c と時間 t である。一般に Eulerの方法で記述されることが多いので、ここでもそれを用いて支配方程式を誘導する。

誘導の流れは、Newton流体を仮定した Navier-Stokes 方程式を基に、種々の合理的な仮定を設定しながら、最終的に線形化された支配方程式を求めるものである。

1. 運動方程式

空間の座標軸を Fig.A1.1 に示すとおり、静水面上に原点を取り、水平方向に x, y 軸、鉛直上向きに z 軸をそれぞれ設定する。また、 x, y, z 方向の流速をそれぞれ u, v, w とする。このとき運動方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{A1-1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \tag{A1-2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \tag{A1-3}$$

ここで、 ρ ：流体の密度、 p ：圧力、 μ ：粘性率である。式(A1-1)~(A1-3)は、いわゆる Navier-Stokes の方程式である。

2. 連続の方程式

質量の保存則より以下の連続の方程式が得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{A1-4}$$

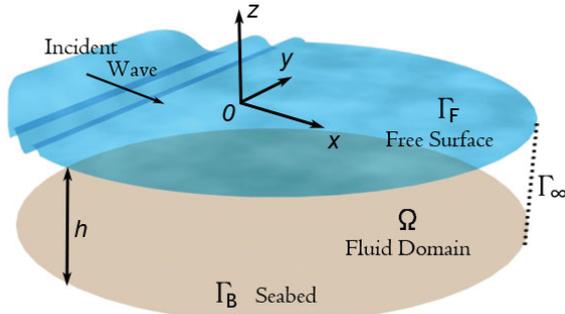


Fig.A1.1 解析座標系 (3次元)
(Definitions of Three Dimensional Analytical Model)

3. 種々の仮定

(1) 非粘性

水の波では、粘性による力に比べて、その慣性項が大きいので、粘性を無視できる流体、すなわち完全流体の仮定が成立する。粘性のない場合 ($\mu = 0$ の場合)、Navier-Stokes の方程式は以下の Euler の運動方程式に帰着する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (A1-5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \quad (A1-6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad (A1-7)$$

(2) 非圧縮性

水の波では、衝撃波などを除いて、運動中は密度が変化しない (ρ が一定) と考えられるので、非圧縮性の仮定が成立する。したがって、連続の方程式(A1-4)は以下に帰着する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (A1-8)$$

(3) 運動の非回転

完全流体については、Helmholz の渦定理が成立する。この定理には、流体領域において初期に渦がなければ渦は生じず、初期に渦があればいつまでも消滅しないという渦の不生不滅の原理が含まれている。この渦定理から、静水中に重力波が進行してきた場合、そこで発生する波の運動は渦なし、すなわち非回転である。非回転運動は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A1-9)$$

ここで、流速ベクトルを $A = [u, v, w]^T$ と定義すると、式(A1-9)は以下で表現することもできる。

$$\text{rot } A = 0 \quad (A1-10)$$

ここで、 $\text{rot } A$ は渦度と呼ばれる。このとき、流速ベクトル A は、

$$A = \text{grad } \Phi \quad (A1-11)$$

のように、あるスカラー関数 Φ の grad として表される。この Φ を速度ポテンシャルという。

4. 圧力方程式

流速 u, v, w と圧力 p を未知数とする支配方程式(A1-5)~(A1-8)

を導いたが、上で速度ポテンシャル Φ の存在がいえたので、この Φ を用いて変形していく。流速の二乗和を

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad (A1-12)$$

とおくと、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (A1-13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (A1-14)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (A1-15)$$

式(A1-13)~(A1-15)をそれぞれ式(A1-5)~(A1-7)に代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (A1-16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \quad (A1-17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) = -g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad (A1-18)$$

が得られる。式(A1-16)~(A1-18)に速度ポテンシャル Φ を導入すると、

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \text{grad} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) = \text{grad} \left(-gz - \frac{p}{\rho} \right) \quad (A1-19)$$

と書き換えられる。式(A1-19)の両辺を積分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (A1-20)$$

ここで、 $f(t)$ は時間 t の任意の関数である。ただし、速度ポテンシャル Φ は空間微分することによって物理的意味を持つので、式(A1-20)の右辺がゼロとなるような時間だけに依存する関数を加えた上で速度ポテンシャル Φ を考えても、議論は本質的に変わらない。そこで、ここでは式(A1-20)の右辺をゼロとした以下の式を用いる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (A1-21)$$

式(A1-20)あるいは式(A1-21)は圧力方程式と呼ばれる。また、連続の方程式(A1-8)は、速度ポテンシャル Φ を用いると以下で表される。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (A1-22)$$

式(A1-22)は Laplace の方程式と呼ばれる。

以上の議論から、運動方程式(A1-5)~(A1-7)と連続の方程式(A1-8)を流速と圧力について解く問題は、圧力方程式(A1-21)と連続の方程式(A1-22)を速度ポテンシャルと圧力について解く等価な問題に変換されたわけである。なお、圧力は式(A1-21)のみに含まれているので、式(A1-22)を解いて得られる速度ポテンシャル Φ を式(A1-21)に代入することによって圧力 p を求めるのが一般的である (式(A1-21)が圧力方程式と呼ばれるのはこのためである)。

5. 境界条件

境界における法線方向流速はゼロであると仮定し、その境界条件を対象とする。本仮定の下では、境界上に存在する水粒子は常にその状態を保っている。したがって、考えている境界を $F(x, y, z; t) = 0$ とすると、 $t = t_0$ において境界上の点 (x_0, y_0, z_0) に存在する水粒子は、 $t = t_0 + \Delta t$ においても境界上に存在するので、次式が成り立つ。

$$F(x_0, y_0, z_0; t_0) = 0 \quad (A1-23)$$

$$F(x_0 + u\Delta t, y_0 + v\Delta t, z_0 + w\Delta t; t_0 + \Delta t) = 0 \quad (A1-24)$$

式(A1-23)、(A1-24)より、

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + u\Delta t, y_0 + v\Delta t, z_0 + w\Delta t; t_0 + \Delta t) - F(x_0, y_0, z_0; t_0)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A1-25})$$

となるので、境界における法線方向流速がゼロである条件は、

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (\text{A1-26})$$

で与えられる。以下では、式(A1-26)を用いて各種の境界条件を導く。

(1) 自由表面境界

$F = \eta - z$ であるので、これを式(A1-26)に代入すると、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z = \eta) \quad (\text{A1-27})$$

あるいは、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z = \eta) \quad (\text{A1-28})$$

(2) 海底面境界

$F = h + z$ として式(A1-26)に代入すると、以下の式が得られる。

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z = -h) \quad (\text{A1-29})$$

あるいは、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z = -h) \quad (\text{A1-30})$$

(3) 構造物(浮体)没水表面境界

式(A1-26)において、時間微分の項をゼロとすることによって、次式が得られる。

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \quad (\text{A1-31})$$

あるいは、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \quad (\text{A1-32})$$

なお、構造物(浮体)没水表面に立てた法線ベクトルを

$$\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T \quad (\text{A1-33})$$

とすれば、以下で表現される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \quad (\text{A1-34})$$

(4) 圧力条件

自由表面での圧力は大気圧に等しいが、便宜上これをゼロとすると、圧力方程式(A1-21)より次式が得られる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + g\eta = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z = \eta) \quad (\text{A1-35})$$

(5) 放射条件

無限速での境界条件は、Sommerfeldにより次式で与えられる。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) = 0 \quad (\text{A1-36})$$

なお、ここでは波動をある周期(周波数)を持つ正弦あるいは余弦関数で表現される運動と仮定しており、本来は実数であるが、数式上の取り扱いの良さから、虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を導入した指数表示を用いて、速度ポテンシャル Φ を以下で変数分離している。

$$\Phi(x, y, z; t) = \phi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{A1-37})$$

ここで、 $\phi(x, y, z)$: 速度ポテンシャルの空間部分、 ω : 角周波数、 t : 時間である。

(6) 圧力方程式・連続の方程式・境界条件の線形化

確認のため、速度ポテンシャルと圧力に関する圧力方程式、連続の方程式、境界条件を以下に再度列挙しておくことにする。

圧力方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (\text{A1-21})$$

連続の方程式

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A1-22})$$

境界条件

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z = \eta) \quad (\text{A1-28})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z = -h) \quad (\text{A1-30})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \quad (\text{A1-34})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + g\eta = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z = \eta) \quad (\text{A1-35})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) = 0 \quad (\text{A1-36})$$

ここで、波の運動は小さく、微小項の二次以上の項(式(A1-28)の第2, 3項, 式(A1-21)と式(A1-35)の第2項)は無視できるとし、水深も一定であると仮定する。その上で、式(A1-28), (A1-35)より水面変動 η を消去すると、

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z = 0) \quad (\text{A1-38})$$

となる。以上を再度まとめると、以下のとおりである。

圧力方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (\text{A1-39})$$

連続の方程式

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A1-22})$$

境界条件

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z = 0) \quad (\text{A1-38})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z = -h) \quad (\text{A1-40})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \quad (\text{A1-34})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) = 0 \quad (\text{A1-36})$$

さらに、式(A1-37)を上すべての式に代入して、速度ポテンシャルの空間部分 $\phi(x, y, z)$ に関する方程式を求めると、以下が得られる。

圧力方程式

$$-i\omega\phi \cdot e^{-i\omega t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (\text{A1-41})$$

連続の方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A1-42})$$

境界条件

$$-\frac{\omega^2}{g} \cdot \phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z=0) \quad (\text{A1-43})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z=-h) \quad (\text{A1-44})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \quad (\text{A1-45})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) = 0 \quad (\text{A1-36})$$

前述のとおり、圧力 P は式(A1-42)~(A1-45)と式(A1-36)を解いて得られる速度ポテンシャルの空間部分 ϕ を式(A1-41)に代入することによって求まるので、以下では線形ポテンシャル理論の下で導かれた式(A1-42)~(A1-45)と式(A1-36)に基づいて、Diffraction 問題、Radiation 問題における速度ポテンシャルの境界値問題をそれぞれ以下に示す。

6. Diffraction 問題

方程式が線形化されたので、速度ポテンシャルの空間部分 ϕ は入射波の速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_i と散乱波の速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_s の和として以下で表現できる。

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z; t) &= \phi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t} \\ &= (\phi_i(x, y, z) + \phi_s(x, y, z)) \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{A1-46})$$

式(A1-46)より、式(A1-42)~(A1-45)は速度ポテンシャルの空間部分 ϕ が、式(A1-36)は散乱波の速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_s がそれぞれ満足する必要があることがわかる。したがって、式(A1-42)~(A1-44)を満足する入射波の速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_i が既知であるとすると、散乱波の速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_s を求める問題は以下で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A1-47})$$

$$-\frac{\omega^2}{g} \cdot \phi_s + \frac{\partial \phi_s}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z=0) \quad (\text{A1-48})$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z=-h) \quad (\text{A1-49})$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_S \quad (\text{A1-50})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial r} - ik\phi_s \right) = 0 \quad (\text{A1-51})$$

7. Radiation 問題

方程式が線形化されたので、浮体運動の6成分に関する速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_l は、角周波数 ω 、単位振幅(1m)で動揺すると仮定した場合、式(A1-37)と同様の考え方の下、以下で与えられる。

$$\Phi_l(x, y, z; t) = \phi_l(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{A1-52})$$

ここで、 $l(=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ は6成分を示すインデックスで、それぞれ1: x 軸方向並進運動、2: y 軸方向並進運動、3: z 軸方向並進運動、4: x 軸回り回転運動、5: y 軸回り回転運動、6: z 軸回り回転運動である。

このとき、浮体運動の6成分に関する速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_l を求める問題は以下で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A1-53})$$

$$-\frac{\omega^2}{g} \cdot \phi_l + \frac{\partial \phi_l}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z=0) \quad (\text{A1-54})$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z=-h) \quad (\text{A1-55})$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial n} = -i\omega n_l \quad \text{on } \Gamma_S \quad (\text{A1-56})$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ n_y(z-G_z) - n_z(y-G_y) \\ n_z(x-G_x) - n_x(z-G_z) \\ n_x(y-G_y) - n_y(x-G_x) \end{bmatrix} \quad (\text{A1-57})$$

$G = [G_x, G_y, G_z]^T$ は静止時の浮体運動回転中心である。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_l}{\partial r} - ik\phi_l \right) = 0 \quad (\text{A1-58})$$

付録Ⅱ：入射波の速度ポテンシャル

Diffraction 問題の境界条件の一つである式(A1-50)より、散乱波の速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_s を求めるためには、入射波の速度ポテンシャルの空間部分 ϕ_i を求めておく必要がある。

運動が十分小さいという仮定の下、線形化された支配方程式より得られる波が微小振幅波である。ここでは、乱れのない流体場において、Fig.A2.1に示すとおり、重力波が平面2次元的に x 軸の負から正の方向へ進行しているとし、微小振幅波理論に基づいて入射波の速度ポテンシャルを求めることにする。

付録Ⅰの記述に従うと、入射波の速度ポテンシャルの空間部分 $\phi(x, z)$ が満たすべき方程式は、以下の式(A2-1)~(A2-3)である。

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A2-1})$$

$$-\frac{\omega^2}{g} \phi_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F (z=0) \quad (\text{A2-2})$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B (z=-h) \quad (\text{A2-3})$$

ここで、線形偏微分方程式を解く簡便な方法の一つである変数分離法を適用する。すなわち、速度ポテンシャルの空間部分 $\phi(x, z)$ を式(A2-4)に示すとおり、それぞれ x, z のみに依存する関数の積で表されるとする。

$$\phi_i(x, z) = X(x) \cdot Z(z) \quad (\text{A2-4})$$

式(A2-4)を式(A2-1)に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (\text{A2-5})$$

式(A2-5)の第1項は x のみの関数、第2項は z のみの関数であるので、式(A2-5)が成り立つためにはそれぞれ定数でなければならない。すなわち、以下が成り立たなければならない。

$$\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 \quad (\text{A2-6})$$

$$\frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 \quad (\text{A2-7})$$

ここで、 k は正の実数とする。式(A2-6)、式(A2-7)の一般解は、それぞれ以下で与えられる。

$$X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (\text{A2-8})$$

$$Z(z) = Ce^{kz} + De^{-kz} \quad (\text{A2-9})$$

ここで、 A, B, C, D は未定係数である。

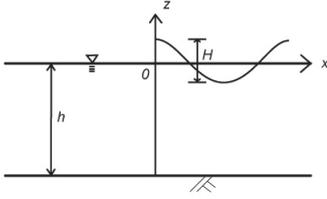


Fig.A2.1 解析座標系 (断面 2 次元)

(Definitions of Two Dimensional Analytical Model)

なお、式(A2-6)、式(A2-7)において、形式的には逆の組み合わせも考えられるが、ここでは \$x\$ 軸方向に周期運動する波を対象としているので、式(A2-8)、式(A2-9)から明らかなように、逆の組み合わせはあり得ないことになる。さらに、ここでは \$x\$ 軸の負から正の方向に進行するとしているので、\$B=0\$ であり、式(A2-8)は次式となる。

$$X(x) = Ae^{ikx} \quad (\text{A2-10})$$

次に、自由表面と海底面における境界条件である式(A2-2)、式(A2-3)より、\$Z(z)\$ の未定係数 \$C, D\$ の関係式を求める。式(A2-9)を式(A2-2)、式(A2-3)に代入し、それぞれ \$z=0, z=-h\$ と置くことによって次式が得られる。

$$-\frac{\omega^2}{g}(C+D) + k(C-D) = 0 \quad (\text{A2-11})$$

$$C - De^{2kh} = 0 \quad (\text{A2-12})$$

式(A2-12)を式(A2-11)に代入して整理すると、次式が得られる。

$$k \cdot \tanh kh = \frac{\omega^2}{g} \quad (\text{A2-13})$$

式(A2-13)は \$\omega\$ と \$k\$ を関係づけるもので、分散関係式と呼ばれる。

式(A2-12)を式(A2-9)に代入すると、

$$\begin{aligned} Z(z) &= De^{2kh}e^{kz} + De^{-kz} \\ &= De^{kh}(e^{kh}e^{kz} + e^{-kh}e^{-kz}) \\ &= 2De^{kh} \cosh k(h+z) \end{aligned} \quad (\text{A2-14})$$

が得られる。式(A2-10)、式(A2-14)を式(A2-4)に代入すると、入射波の速度ポテンシャルの空間部分 \$\phi_i\$ は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} \phi_i(x, z) &= Ae^{ikx} \cdot 2De^{kh} \cosh k(h+z) \\ &= E \cdot \cosh k(h+z) \cdot e^{ikx} \end{aligned} \quad (\text{A2-15})$$

ここで、\$E\$ は未定係数である。

一方、支配方程式の誘導の過程において、線形化された自由表面の境界条件として次式が得られている (式(A1-35)参照)。

$$\eta = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{A2-16})$$

式(A1-37)と同様の考え方の下、式(A2-15)を式(A2-16)に代入すると、

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ E \cdot \cosh k(h+z) \cdot e^{ikx} \cdot e^{-i\omega t} \right\} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{i\omega}{g} \cdot E \cdot \cosh kh \cdot e^{ikx} \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{A2-17})$$

が得られる。実際の水面変動は、式(A2-17)の実数部を取ることによって評価されるので、

$$\eta = -\frac{\omega}{g} \cdot E \cdot \cosh kh \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (\text{A2-18})$$

が成り立つ。水面変動の振幅を \$\frac{H}{2}\$ とすると、式(A2-18)より

$$-\frac{\omega}{g} \cdot E \cdot \cosh kh = \frac{H}{2}$$

となるので、未定係数 \$E\$ は次式で求められる。

$$E = -\frac{gH}{2\omega} \cdot \frac{1}{\cosh kh} \quad (\text{A2-19})$$

式(A2-19)を式(A2-15)に代入して、最終的に以下が得られる。

$$\phi_i(x, z) = -\frac{gH}{2\omega} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot e^{ikx} \quad (\text{A2-20})$$

なお、入射波の速度ポテンシャルの空間部分 \$\phi_i\$ は普遍的に式(A2-20)で表されるわけではなく、位相差のため、見かけ上は若干違ってくる場合があることに注意する。例えば、式(A2-20)の右辺に \$i\$ や \$-1\$ がかかっている場合は、それぞれ位相が \$90^\circ, 180^\circ\$ ずれていることに対応する。ちなみに、上述の誘導で、式(A2-15)の未定係数 \$E\$ を \$iE\$ と置き換えると、最終的に得られる式は、

$$\phi_i(x, z) = -i \frac{gH}{2\omega} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot e^{ikx} \quad (\text{A2-21})$$

となり、式(A2-20)の右辺に \$i\$ をかけたものとなる。ちなみに、WALK-G では入射波の速度ポテンシャルの空間部分 \$\phi_i\$ として、式(A2-21)を用いている。

Fig.A2.2 に示すように、\$x\$ 軸と角度 \$\alpha\$ をなす方向から入射してくる場合は、式(A2-21)の \$x\$ を \$kx \cos \alpha + ky \sin \alpha\$ で置き換えることによって以下の 3 次元の速度ポテンシャルの空間部分 \$\phi_i\$ の式が得られる。

$$\phi_i(x, y, z) = -i \frac{gH}{2\omega} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha)} \quad (\text{A2-22})$$

式(A1-50)より、入射波の速度ポテンシャルの空間部分の法線方向微分が必要となるので、式(A2-22)に対するそれらの式を以下に記す。

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = n_x \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + n_y \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + n_z \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \quad (\text{A2-23})$$

ここで、\$n(x, y, z) = [n_x, n_y, n_z]^T\$ は法線ベクトルである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} &= -i \frac{gH}{2\omega} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot ik \cos \alpha \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha)} \\ &= -i \frac{gH}{2\omega} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot k \cos \alpha \cdot \{-\sin(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha) + i \cos(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha)\} \end{aligned} \quad (\text{A2-24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} &= -i \frac{gH}{2\omega} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot ik \sin \alpha \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha)} \\ &= -i \frac{gH}{2\omega} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot k \sin \alpha \cdot \{-\sin(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha) + i \cos(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha)\} \end{aligned} \quad (\text{A2-25})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} &= -i \frac{gH}{2\omega} \cdot k \cdot \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha)} \\ &= -i \frac{gH}{2\omega} \cdot k \cdot \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot \{\cos(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha) + i \sin(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha)\} \end{aligned} \quad (\text{A2-26})$$

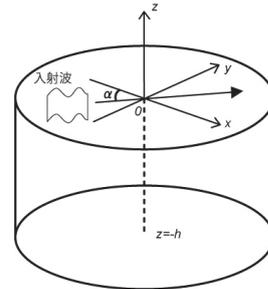


Fig.A2.2 解析座標系 (3 次元)

(Definitions of Three Dimensional Analytical Model)

付録Ⅲ：工学的諸量

それぞれ速度ポテンシャルの空間部分が求まると、Diffraction 問題より波強制力，Radiation 問題より付加質量，造波減衰がそれぞれ以下で評価される。

波強制力

付録Ⅰで示したとおり，浮体没水表面の任意点における圧力は，速度ポテンシャルの空間部分を式(A1-41)に代入して求められる。

$$p(x, y, z; t) = -\rho g z + i\rho\omega\phi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{A3-1})$$

ここで， $\phi(x, y, z)$ は付録Ⅰの式(A1-46)で示されているとおり，入射波と散乱波の速度ポテンシャルの空間部分の和で，式(A3-1)の右辺第1項，第2項は，それぞれ静水圧，(波による)動水圧である。したがって，構造物に作用する波強制力の6成分は以下で求められる。

$$F_x(t) = \int_{\Gamma_s} p(x, y, z; t) \cdot n_1 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-2})$$

$$F_y(t) = \int_{\Gamma_s} p(x, y, z; t) \cdot n_2 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-3})$$

$$F_z(t) = \int_{\Gamma_s} p(x, y, z; t) \cdot n_3 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-4})$$

$$M_x(t) = \int_{\Gamma_s} p(x, y, z; t) \cdot n_4 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-5})$$

$$M_y(t) = \int_{\Gamma_s} p(x, y, z; t) \cdot n_5 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-6})$$

$$M_z(t) = \int_{\Gamma_s} p(x, y, z; t) \cdot n_6 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-7})$$

ここで， $n_l (l=1,2,3,4,5,6)$ は付録Ⅰの最後に記したものと同じで，

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ n_y(z-G_z) - n_z(y-G_y) \\ n_z(x-G_x) - n_x(z-G_z) \\ n_x(y-G_y) - n_y(x-G_x) \end{bmatrix} \quad (\text{A3-8})$$

$G = [G_x, G_y, G_z]^T$ は静止時の浮体運動回転中心である。

付加質量・造波減衰

波強制力と同様に，浮体没水表面の任意点における圧力は，速度ポテンシャルの空間部分を式(A1-41)に代入して求められる。

$$p_l(x, y, z; t) = i\rho\omega\phi_l(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{A3-9})$$

ここで， $l(=1,2,3,4,5,6)$ は6成分を示すインデックスで，それぞれ1：x軸方向並進運動，2：y軸方向並進運動，3：z軸方向並進運動，4：x軸回り回転運動，5：y軸回り回転運動，6：z軸回り回転運動である。構造物に作用する力の6成分も以下で求められる。

$$F_x^l(t) = \int_{\Gamma_s} p_l(x, y, z; t) \cdot n_1 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-10})$$

$$F_y^l(t) = \int_{\Gamma_s} p_l(x, y, z; t) \cdot n_2 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-11})$$

$$F_z^l(t) = \int_{\Gamma_s} p_l(x, y, z; t) \cdot n_3 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-12})$$

$$M_x^l(t) = \int_{\Gamma_s} p_l(x, y, z; t) \cdot n_4 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-13})$$

$$M_y^l(t) = \int_{\Gamma_s} p_l(x, y, z; t) \cdot n_5 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-14})$$

$$M_z^l(t) = \int_{\Gamma_s} p_l(x, y, z; t) \cdot n_6 d\Gamma(x, y, z) \quad (\text{A3-15})$$

ここで， n_l は式(A3-8)と同じである。このとき，付加質量 m_{il} ，造波減衰 $C_{il} (i=1,2,3,4,5,6)$ は，それぞれ加速度，速度に比例する項として次式で与えられる。

$$m_{1l} = -\frac{\text{Re}(F_x^l)}{\omega^2}, \quad C_{1l} = -\frac{\text{Im}(F_x^l)}{\omega} \quad (\text{A3-16})$$

$$m_{2l} = -\frac{\text{Re}(F_y^l)}{\omega^2}, \quad C_{2l} = -\frac{\text{Im}(F_y^l)}{\omega} \quad (\text{A3-17})$$

$$m_{3l} = -\frac{\text{Re}(F_z^l)}{\omega^2}, \quad C_{3l} = -\frac{\text{Im}(F_z^l)}{\omega} \quad (\text{A3-18})$$

$$m_{4l} = -\frac{\text{Re}(M_x^l)}{\omega^2}, \quad C_{4l} = -\frac{\text{Im}(M_x^l)}{\omega} \quad (\text{A3-19})$$

$$m_{5l} = -\frac{\text{Re}(M_y^l)}{\omega^2}, \quad C_{5l} = -\frac{\text{Im}(M_y^l)}{\omega} \quad (\text{A3-20})$$

$$m_{6l} = -\frac{\text{Re}(M_z^l)}{\omega^2}, \quad C_{6l} = -\frac{\text{Im}(M_z^l)}{\omega} \quad (\text{A3-21})$$

ここで，Re, Im はそれぞれ()内の実数部，虚数部を取ることを意味しており，()内の力の6成分は時間項を除いたものである。

Wave Response Analysis for Multiple Floating Bodies

Toshihiko Takahashi, Nobuyuki Iwamae¹⁾, Takako Fukuyama, Yoshinobu Akiyama and Tsuyoshi Ikeya

In marine constructions, it is crucial to evaluate motions of a working vessel, in order to ensure safety and improve construction accuracy. Especially under the situation in which a breakwater and other vessels exist around the working vessel, wave response analysis that can deal with multiple floating bodies is required, since influence of reflection and diffraction by the breakwater and interaction among the vessels should be considered. The wave response analysis for one floating body based on the linear potential theory has been established, and it can be extended for multiple floating bodies in principle. In this paper, the Green function method for the wave response analysis for one floating body is fully described and it is shown that it can be naturally extended for multiple floating bodies. Some numerical results for multiple floating bodies are demonstrated and their validity is discussed.