鹿島技術研究所年報
第67号 2019年12月1日

１次元フックの法則の３次元への拡張モデルとその検証

A Study on an Extended Model of Hooke's Law to 3D

稲　葉　洋　平

要　　約

フックの法則とは，応力とひずみが比例することを表した法則であり，力学の分野で最も重要な法則の１つである。しかし，ラメ定数λの持つ物理的意味については明らかとなっていない。物理的な解釈が不明な式を使用することは，理論をさらに深く考察する際には大きな障害であり，可能な範囲で物理的解釈を与えるようにするべきである。そこで，本研究では以下を示すことを目的とする。１次元フックの法則を用いたモデルを構築し，フックの法則を２次元および３次元に理論的に拡張する方法を提案する。その結果を用い，一般化フックの法則の物理的解釈を考察し，内部応力に関する仮説を提案する。この仮説から理論的に導かれる破壊基準が現実の材料の破壊を説明できることを検証する。検証の結果，以下の可能性を示した。等方弾性体であれば，等方内部応力の概念を仮定できる。これをフックの法則に関する等方内部応力仮説と呼ぶ。この等方内部応力仮説は，１軸圧縮であっても等方内部応力によって発生する横方向の引張応力の存在を予想する。等方内部応力仮説から導かれる破壊基準により脆性材料の現実的な破壊を説明できることから，この仮説は現実的な仮説と考えられる。

目　　次

Ⅰ. はじめに

フックの法則とは，応力とひずみが比例することを表した法則であり，力学の分野で最も重要な法則の１つである。フックの法則には，大きく分けて１次元におけるフックの法則と３次元におけるフックの法則（＝一般化フックの法則，ただし以下では３次元フックの法則と呼ぶ）の２種類がある。フックが主張したのは，基本的に１次元フックの法則であり，バネに作用する錘とバネの長さ変化が比例関係にあることを表現している。一方，３次元等方弾性体も同様の挙動を示すことから３次元フックの法則がつくられるのであるが，これにはフックは直接関係しておらず，コーシー，ポアソンなどの業績による[1]。次式に，それぞれのフックの法則を示す。１次元と３次元では式表現が異なる。式中の記号は，σ が応力，ε がひずみ，k が弾性係数，λ が第一ラメ定数，μ が第二ラメ定数を表す。ij や kk などの添え字がある記号はそれがテンソルであることを示す。

１次元フックの法則

$$\sigma = k\varepsilon \tag{1}$$

３次元（等方弾性体）フックの法則[2]

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2}$$

３次元フックの法則は，応力とひずみを用いたテンソル表示としており，δ はクロネッカーの δ である。現在では，等方弾性体における３次元フックの法則が，(2)式の表現となることはテンソル解析によって数学的に証明されている[2)3)]。しかし，λ の持つ物理的意味については明らかとなっていない[4]。これは，３次元フックの法則の成立過程に起因するものと考えられる。

３次元フックの法則の成立過程をみてみると，等方弾性体の弾性係数は１つか２つかといった論争を経て，グリーンが現在のテンソル解析にあたる考え方を示し，最終的に(2)式の形に決着している[1]。一方で，(2)式を得るには，フックの法則の応力とひずみの関係を等方４階テンソルにより記述して数学的な操作を行えばよく，そこに物理的なモデルや解釈は必要とされない。すなわち，(2)式が代数的に導かれたことが，λ の物理的な意味が明らかになっていない主な理由と考えられる。物理的な解釈が不明な式を使用することは，理

キーワード：一般化フックの法則，ラメ定数，ポアソン比，破壊基準，斜材モデル
Keywords: generalized Hooke's law, Lame's constants, Poisson's ratio, failure criterion, diagonal model

論をさらに深く考察する際には障害であり，可能な範囲で物理的解釈を与えるようにするべきである。本研究の目的は，以下を示すことにある。

①１次元フックの法則を用いたモデルを構築し，フックの法則を２次元および３次元に理論的に拡張する方法を提案する。

②その結果を用い，一般化フックの法則の物理的解釈を行い，内部応力に関する仮説を提案する。

③仮説を用いた破壊基準により，脆性材料の現実的な破壊が説明できることを検証する。

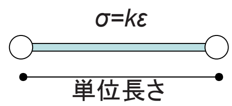

Fig.1　１次元フック弾性体
(Hooke's Elastic Body in 1D)

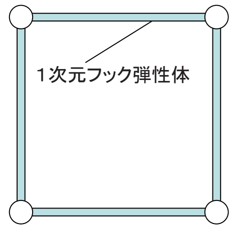

Fig.2　標準モデル
(Standard Model)

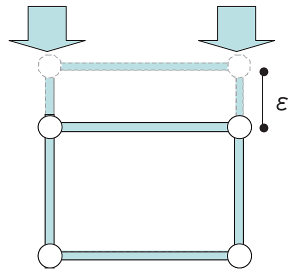

Fig.3　標準モデルによる１軸圧縮時の挙動
(Behavior of Uniaxial Compress by Standard Model)

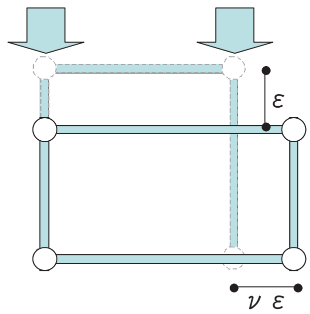

Fig.4　実際の１軸圧縮時の挙動
(Actual Behavior of Uniaxial Compress)

Ⅱ．斜材モデルによる一般化フックの法則の物理的解釈

１．フックの法則のモデル化の概要

（１）１次元フックの法則

材軸方向以外には変形しない理想的な単位断面積，単位長さの線材（以下，１次元フック弾性体（Fig.1）と称す）について１次元フックの法則が成立することを前提とする。１次元フックの法則の数式表現は $\sigma=k\varepsilon$ である。

（２）１次元フック弾性体で構築可能なモデル

１次元フックの法則を２次元に拡張する。現実には２次元材料というものは存在しないが，３次元へ拡張するステップとして以下で検討を加える。取り扱う２次元材料は，理解を容易にするために等方性を持つとする。なお，以下で検討するモデルは主応力方向からの力のみに対して成立するようにした簡略モデルである。簡略化している理由は主に３つある。①本来の等方弾性体はすべての方向からの力に対して成立するが，簡略モデルからの拡張は容易であること。②すべての応力状態は主応力に変換できるため，簡略モデルでも本質的な特徴についてはすべて検討可能であること。③簡略モデルが１次元フックの法則だけから構築可能であること。

１次元フックの法則が成立するとしたことにより１次元フック弾性体については，$\sigma=k\varepsilon$ の関係を利用することができる。１次元フック弾性体を組み合わせてできる最も単純な２次元モデルは正三角形である。しかし，正三角形は応力の計算などの点で不都合な点があるため，次に単純なモデルである正方形（以下，標準モデルと称す）について検討する（Fig.2）。なお，線材の接合部はピン接合されているものとし，線材には軸力以外作用しないものとする。

この正方形に荷重が作用した場合の挙動は，$\sigma=k\varepsilon$ の関係から推定可能である。最も単純な例として，１軸圧縮の場合について検討する（Fig.3）。σ の力が作用した場合，荷重方向にひずみ ε を生じ，荷重が作用しない方向の変位は 0 である。この挙動は，１次元フック弾性体と全く同じであり，２，３次元等方弾性体としての特徴を表現できていない。経験的事実が示すところは載荷方向に直交する方向にも変形する（Fig.4）ということである。この不具合を修正するために，ポアソンは載荷軸に直交方向のひずみを載荷軸方向のひずみに比例する形であらわした。このときに用いられる比例定数がポアソン比である。これは材料固有の値であるとされており，３次元等方弾性体の場合は -1.0～0.5 の値をとると考えられている[5)]。すなわち，１軸圧縮された２，３次元等方弾性体は，圧縮応力に比例して載荷軸方向にひずみ，載荷軸方向のひずみに比例した横ひずみを示すと考えられている。

現在の３次元フックの法則は，この標準モデルを３次元化したものとポアソン比の概念を組み合わせて代数的に導かれているといってよい。すなわち，標準モデルだけからでは理論的に横ひずみを導くことはできないため，ポアソン比の概念を用いて横ひずみを付加的に考慮している。

（３）斜材モデル

そこで，横ひずみの問題を解消するために，Fig.５に示すように，新たに正方形の対角に斜材を組み込んだモデル（以下，斜材モデルと称す）を提案する。ここで，斜材は正方形をつくる材とは異なってよいが，等方弾性体を前提に考えるため，正方形をつくる４本の線材（以下，標準材と称す。弾性係数 k_1）および２本の斜材（以下，斜材と称す。弾性係数 k_2）はそれぞれ同じ１次元フック弾性体であるとする。これにより，x，y 方向どちらの力に対しても，同じように変形することが保証され，等方弾性体の前提を保証することができる。１次元フックの法則により，正方形の各辺は $\sigma=k_1\varepsilon$ の関係を持ち，斜材は $\sigma=k_2\varepsilon$ の関係を持つ。この斜材モデルに荷重が作用した場合の挙動は，荷重方向には当然に変形を生じるが，標準モデルと異なり，斜材を介して直交方向の線材にも荷重が作用し，変形が生じる。すなわち，斜材を組み込むことにより，２次元等方弾性体の現実的な挙動を表現することが可能となり，ポアソン比という概念を用いず，１次元フックの法則だけで説明できる可能性がある。

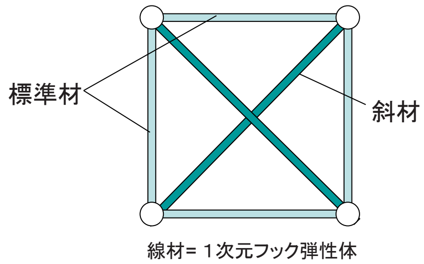

Fig.5　斜材モデル
(Diagonal Model)

２．２次元等方弾性体のモデル化

（１）２次元斜材モデルの応力とひずみの導出

斜材モデルにおいて線材に作用する力およびひずみについて定量的に検討するために，数式表現を用いる。斜材モデルは構造力学では不静定トラスとして扱われ，それぞれの１次元フック弾性体（線材）に作用する力は，力のつりあいと変形の適合条件から推定可能である。微少変形および弾性を仮定すれば，１軸圧縮（引張）以外の応力状態は１軸圧縮の重ねあわせにより表現可能であるため，以下，１軸圧縮について検討する。

２次元斜材モデルが１軸圧縮を受ける状態を Fig.６に示す。標準材の１本あたりの弾性係数を $k_1/2$, 斜材の弾性係数を $k_2/2$ とする。弾性係数を $1/2$ にするのは，x 方向，y 方向それぞれ２本の線材がモデルに存在するためであり，のちの式形を簡略化するためである。節点をそれぞれ A，B，C，D とし，D 点に関する力のつりあいおよび変形の適合条件を検討する（Fig.７)。

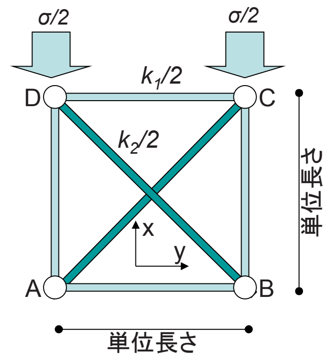

Fig.6　斜材モデルによる１軸圧縮
(Uniaxial Compress by Diagonal Model (2D))

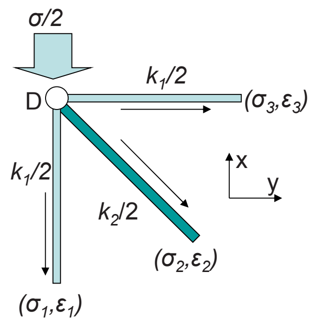

Fig.7　D 点の応力
(Stress at Point D)

力のつりあい式

x 方向

$$\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}+\sigma_1-\frac{\sigma}{2}=0 \tag{3}$$

y 方向

$$\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}+\sigma_3=0 \tag{4}$$

変形の適合条件として，ΔACD が変形後も直角三角形を保持することを条件とする。また，線材 AC の角度変化は微少のため無視する。

変形の適合条件

$$(1+\varepsilon_1)^2+(1+\varepsilon_3)^2=\left[\sqrt{2}(1+\varepsilon_2)\right]^2 \tag{5}$$

２次の微少量である $\varepsilon_i^2\ (i=1,2,3)$ を無視すると，次式が得られる。

$$\varepsilon_1+\varepsilon_3=2\varepsilon_2 \tag{6}$$

なお，１次元弾性体についてはフックの法則が成立するため，σ と ε に次式の関係がある。

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{\frac{k_1}{2}}\ ,\ \varepsilon_2=\frac{\sigma_2}{\frac{k_2}{2}}\ ,\ \varepsilon_3=\frac{\sigma_3}{\frac{k_1}{2}} \tag{7}$$

これより，線材のひずみ ε_1，ε_2，ε_3 は次式で表現できる。

$$\varepsilon_1=\frac{2\sqrt{2}k_1+k_2}{2k_1(\sqrt{2}k_1+k_2)}\sigma \tag{8}$$

$$\varepsilon_2=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}k_1+k_2)}\sigma \tag{9}$$

$$\varepsilon_3=-\frac{k_2}{2k_1(\sqrt{2}k_1+k_2)}\sigma \tag{10}$$

よって，2次元斜材モデルに1軸圧縮応力 σ が作用した場合の各線材のひずみを定式化できた。

（2）各種弾性係数およびポアソン比の定式化

各線材に作用する力およびひずみを定式化できたため，2次元の斜材モデルから導かれるポアソン比 ν，縦弾性係数 E，せん断弾性係数 μ，第一ラメ定数 λ，体積（面積）弾性係数 K を定式化する。3次元の場合の体積弾性係数 K は，2次元においては面積弾性係数と呼ぶ方が正しいと思われるが，本質的な意味は同じであることから，以下では2次元の体積弾性係数と呼ぶこととする。なお，3次元の場合と区別するために，2次元のポアソン比 ν などを記号では ν_2 と次元の添字をつけて以下記述する。

(a) ポアソン比 ν_2

ポアソン比は，1軸圧縮を受けた際の横ひずみを縦ひずみで除し，負号をつけたものである。よって，斜材モデルから導かれるポアソン比は次式となる。

$$\nu_2 = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{k_2}{2\sqrt{2}k_1 + k_2} \tag{11}$$

(b) 縦弾性係数 E_2

縦弾性係数は，1軸圧縮を受けた際の縦ひずみと外部応力 σ とを関連付ける係数である。斜材モデルから導かれる縦弾性係数は次式となる。

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{2k_1(\sqrt{2}k_1 + k_2)}{2\sqrt{2}k_1 + k_2} \tag{12}$$

(c) せん断弾性係数 μ_2

せん断弾性係数は，純せん断が作用した際のせん断ひずみとせん断応力を関連付ける係数であり，これは主応力方向に直した場合，縦ひずみと外部応力 σ とを関連付ける係数となる。純せん断は x 方向に圧縮力 σ，y 方向に引張力 σ が作用した際に得られるので，斜材モデルから導かれるせん断弾性係数は次式となる。

$$2\mu_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = k_1 \tag{13}$$

(d) 第一ラメ定数 λ_2

第一ラメ定数は，ラメの式によって定義される係数である。すなわち，μ_2 によって発生する力を外部応力から差し引いた残りの力と面積ひずみ $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ とを関連付ける係数である。1軸圧縮の場合に適用すると次式となる。

$$\begin{pmatrix}\sigma\\0\end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix}\varepsilon_1+\varepsilon_3\\\varepsilon_1+\varepsilon_3\end{pmatrix} + 2\mu_2\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_3\end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\therefore \lambda_2 = \frac{\sigma - 2\mu_2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_3} = \frac{-2\mu_2\varepsilon_3}{\varepsilon_1+\varepsilon_3} = \frac{-k_1\varepsilon_3}{\varepsilon_1+\varepsilon_3} = \frac{k_2}{2\sqrt{2}} \tag{15}$$

(e) 2次元の体積弾性係数 K_2

2次元の体積弾性係数は，x 方向および y 方向から圧縮応力 σ が作用した際の面積ひずみと外部応力 σ とを関連付ける係数である。斜材モデルから導かれる2次元の体積弾性係数は次式となる。

$$K_2 = \frac{\sigma}{2(\varepsilon_1+\varepsilon_3)} = \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2\sqrt{2}} \tag{16}$$

（3）各種弾性係数およびポアソン比の相互関係

以上，斜材モデルから導かれるポアソン比，縦弾性係数，せん断弾性係数，第一ラメ定数，2次元の体積弾性係数について定式化ができた。定式化により，弾性係数に関わる物性はすべて線材の弾性係数である k_1, k_2 により表現できるので，相互の関係を次のように表現できる。

$$E_2 = 2\mu_2(1+\nu_2) \tag{17}$$

$$\lambda_2 = \frac{2\mu_2\nu_2}{1-\nu_2} \tag{18}$$

$$K_2 = \frac{E_2}{2(1-\nu_2)} \tag{19}$$

以上，2次元斜材モデルの弾性係数に関する物性値を定式化した。

3．3次元等方弾性体のモデル化

（1）3次元斜材モデルの応力とひずみ導出

同様の手順により，フックの法則を3次元に拡張する。3次元の斜材モデルは Fig. 8 となる。標準材の弾性係数を $k_1/4$，斜材の弾性係数を $k_2/4$ とする。つりあい式および変形の適合条件の式は次式となる（Fig. 9）。

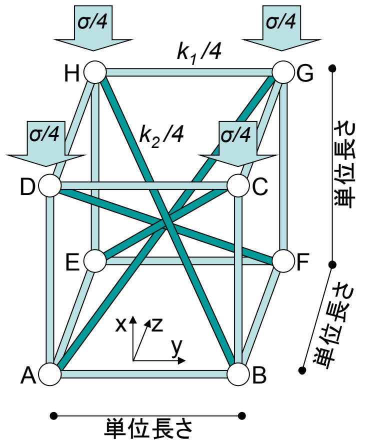

Fig.8　3次元斜材モデルによる1軸圧縮
(Uniaxial Compress by Diagonal Model (3D))

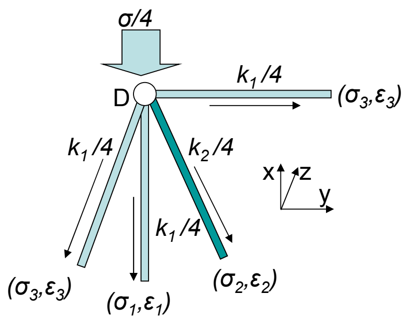

Fig.9　H 点の応力
(Stress at Point H)

つりあい式

x 方向

$$\sigma_1+\frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}-\frac{\sigma}{4}=0 \quad (20)$$

y 方向

$$\frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}+\sigma_3=0 \quad (21)$$

変形の適合条件として，ΔHEB が変形後も直角三角形を保持することを条件とする。また，線材 HB の角度変化は微少のため無視する。

変形の適合条件

$$(1+\varepsilon_1)^2+\left[\sqrt{2}(1+\varepsilon_3)\right]^2=\left[\sqrt{3}(1+\varepsilon_2)\right]^2 \quad (22)$$

２次の微少量である $\varepsilon_i^2\ (i=1,2,3)$ を無視すると，次式が得られる。

$$\varepsilon_1+2\varepsilon_3=3\varepsilon_2 \quad (23)$$

なお，１次元弾性体についてはフックの法則が成立するため，σ と ε に次式の関係がある。

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{\frac{k_1}{4}},\ \varepsilon_2=\frac{\sigma_2}{\frac{k_2}{4}},\ \varepsilon_3=\frac{\sigma_3}{\frac{k_1}{4}} \quad (24)$$

これより，線材のひずみ ε_1，ε_2，ε_3 は次式で表現できる。

$$\varepsilon_1=\frac{3\sqrt{3}k_1+2k_2}{3k_1(\sqrt{3}k_1+k_2)}\sigma \quad (25)$$

$$\varepsilon_2=\frac{\sqrt{3}}{3(\sqrt{3}k_1+k_2)}\sigma \quad (26)$$

$$\varepsilon_3=-\frac{k_2}{3k_1(\sqrt{3}k_1+k_2)}\sigma \quad (27)$$

よって，３次元斜材モデルに１軸圧縮応力 σ が作用した場合の各線材のひずみを定式化できた。

（２）各種弾性係数およびポアソン比の定式化

各線材に作用する力およびひずみを定式化できたため，３次元の斜材モデルから導かれるポアソン比 ν，縦弾性係数 E，せん断弾性係数 μ，第一ラメ定数 λ，体積弾性係数 K を定式化する。

(a) ポアソン比 ν

ポアソン比は，１軸圧縮を受けた際の横ひずみを縦ひずみで除し，負号をつけたものである。よって，斜材モデルから導かれるポアソン比は次式となる。

$$\nu=-\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}=\frac{k_2}{3\sqrt{3}k_1+2k_2} \quad (28)$$

(b) 縦弾性係数 E

縦弾性係数は，１軸圧縮を受けた際の縦ひずみと外部応力 σ とを関連付ける係数である。斜材モデルから導かれる縦弾性係数は次式となる。

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_1}=\frac{3k_1(\sqrt{3}k_1+k_2)}{3\sqrt{3}k_1+2k_2} \quad (29)$$

(c) せん断弾性係数 μ

せん断弾性係数は，純せん断が作用した際の縦ひずみと外部応力 σ とを関連付ける係数である。純せん断は x 方向に圧縮応力 σ, y 方向に引張応力 σ が作用した際に得られるので，斜材モデルから導かれるせん断弾性係数は次式となる。

$$2\mu=\frac{\sigma}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}=k_1 \quad (30)$$

(d) 第一ラメ定数 λ

第一ラメ定数は，ラメの式によって定義される係数である。すなわち，μ によって発生する力を外部応力から差し引いた残りの力と体積ひずみ $(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$ とを関連付ける係数である。１軸圧縮の場合に適用すると次式となる。

$$\begin{pmatrix}\sigma\\0\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_3\\\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_3\\\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_3\end{pmatrix}+2\mu\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_3\\\varepsilon_3\end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\therefore\lambda=\frac{\sigma-2\mu\varepsilon_1}{\varepsilon_1+2\varepsilon_3}=\frac{-2\mu\varepsilon_3}{\varepsilon_1+2\varepsilon_3}=\frac{-k_1\varepsilon_3}{\varepsilon_1+2\varepsilon_3}=\frac{k_2}{3\sqrt{3}} \quad (32)$$

(e) 体積弾性係数 K

体積弾性係数は，x，y 方向および z 方向から圧縮応力 σ が作用した際の体積ひずみと外部応力 σ とを関連付ける係数である。斜材モデルから導かれる体積弾性係数は次式となる。

$$K=\frac{\sigma}{3(\varepsilon_1+2\varepsilon_3)}=\frac{k_1}{3}+\frac{k_2}{3\sqrt{3}} \quad (33)$$

（３）各種弾性係数およびポアソン比の相互関係

以上，斜材モデルから導かれるポアソン比，縦弾性係数，せん断弾性係数，第一ラメ定数，体積弾性係数について定式化した。定式化により，弾性係数に関わる物性はすべて線材の弾性係数である k_1，k_2 により表現できるので，相互の関係を次のように表現できる。

$$E=2\mu(1+\nu) \quad (34)$$

$$\lambda=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad (35)$$

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (36)$$

（４）斜材モデルと現在の３次元フックの法則との関係

以上，斜材モデルと１次元フックの法則より，３次元斜材モデルの弾性係数に関する物性値を定式化し，相互関係を示した。これらの物性値の相関は，現在使用されている３次元等方弾性体に対する３次元フックの法則の関係と同一である[2)]。このことは，主応力方向に関して３次元フックの法則が成立する等方弾性体としての条件を，斜材モデルが備えていることを示す。

４．考　察

（１）斜材モデルから新たに得られる知見

主応力方向に関しては，３次元フックの法則が成立する等方弾性体としての条件を斜材モデルが満たすことを示した。そこで本考察では，斜材モデルにより現実の３次元等方弾性体の挙動がシミュレートできることを前提として，斜材モデルから新たに得られる知見について述べる。

(a) せん断弾性係数 μ

斜材モデルを用いることにより，せん断弾性係数が標準材の弾性係数である k_1 だけで表現できることがわかった。すなわち，せん断弾性係数の物理的意味は，斜材モデルにおいては，x，y，z の各方向に関する標準材の弾性係数である。せん断弾性係数は，斜材モデルから斜材を除いた場合の縦弾性

係数と等価であり，ポアソン比が 0 （$k_2=0$）の場合の縦弾性係数と等価である。

（b）第一ラメ定数 λ

斜材モデルを用いることにより，第一ラメ定数 λ を斜材の弾性係数である k_2 だけで表現できることがわかる。なお，係数の $1/2\sqrt{2}$ や $1/3\sqrt{3}$ は，各次元において傾いている斜材の弾性係数を標準材方向の弾性係数に修正する意味をもつ。すなわち，第一ラメ定数 λ の物理的意味は，斜材モデルにおいては，x，y，z の各方向に関する斜材の弾性係数を表す。

（c）ポアソン比 ν

斜材モデルを用いることにより，ポアソン比が線材の弾性係数（非負）である k_1 および k_2 により定式化できた。これより，ポアソン比の値の範囲を限定することができる。μ および λ は k_1 および k_2 と同じ意味を持つため，非負であることを考慮すれば，２次元等方弾性体のポアソン比 ν_2 は，$k_2=0$ の場合に $\nu_2=0$，$k_2=\infty$ の場合に $\nu_2=1.0$ となる。すなわち，$0\leqq\nu_2\leqq1.0$ である。一方，３次元等方弾性体のポアソン比 ν は，$k_2=0$ の場合に $\nu=0$，$k_2=\infty$ の場合に $\nu=0.5$ となる。すなわち，$0\leqq\nu\leqq0.5$ である。これまでの説明では，μ および K が非負であることなどから $-1\leqq\nu\leqq0.5$ とされてきた[5)]が，斜材モデルによればこの範囲を狭めることができる。

（d）１軸圧縮時の挙動

１軸圧縮力が作用すると，圧縮力に対して圧縮軸方向の標準材と斜材によって抵抗する。標準材と斜材が負担する力の比率は，k_1，k_2 の比によって定まる。斜材が力を負担した場合，斜材を介して軸方向と直交方向の標準材にも力が作用する。その結果，軸方向と直交方向の標準材にも変形が生じ，力が作用することになる。以上が，３次元等方弾性体について斜材モデルの観点からみた１軸圧縮時の挙動である。すなわち，斜材モデルの観点から１軸圧縮を検討した場合，これまでは軸方向と直交方向には存在しないと考えられてきた内部応力（軸方向と直交方向の標準材に作用する力）が存在することが予想される。

また，このように考えると，現在定義されている縦弾性係数 E は，物理的には特別な意味を持たない。ポアソン比が 0 以外の等方弾性体の縦弾性係数は，標準材と斜材両方の弾性係数の影響を受けているためである。物理的に特別な意味を持つ弾性係数は，標準材と斜材のそれぞれの弾性係数である k_1，k_2 であり，現在一般的に用いられている物理量としてはラメ定数の μ と λ である。

（e）斜材に作用する力の等方性

斜材の効果を検討するために，斜材がある場合とない場合を比較する。斜材がない場合に１軸圧縮力を受けると，圧縮軸方向（x 方向）の標準材が圧縮力すべてを負担することになり，圧縮軸と直交する方向（y，z 方向）には力が作用しない。すなわち，標準材に作用している力は，これと直交する標準材に影響を与えず，独立している。一方，斜材がある場合に１軸圧縮力を受けると，圧縮軸方向の標準材は圧縮力すべてを負担せず，一部を斜材が負担する。斜材は圧縮軸と直交する方向にも力を伝達する結果，斜材から標準材に伝達される力は x，y，z 方向すべてに等しくなる。すなわち，斜材に作用している力は，x，y，z 方向に等方的に作用する。

（２）斜材モデルの全方向への拡張

前述したように，斜材モデルは簡略モデルであり，主応力方向と標準材の軸方向が一致していなければ正しい挙動をとらないため，これを全方向に対して成立するように拡張する必要がある。簡略モデルを用いてきたのは，ラメの第一項と第二項の物理的意味を１次元フックの法則と斜材モデルだけで説明することが目的であった。

斜材モデルを拡張するには，考察により明らかになった主応力方向における線材の特徴をそのまま全方向に拡張すればよい。すなわち，標準材が表現していた μ を含む項が表現するのは，１次元フックの法則が成立する立方体となる。この立方体は，弾性係数が 2μ であり，応力が作用する方向にのみ変形し，ポアソン効果による横方向変形はしないと考えればよい。一方，斜材が表現していた λ を含む項が表現するのは，体積変化にともない，その体積変化を妨げるように生じる全方向への等方（内部）応力である。この体積変化と等方的な応力とを関係付けているのが λ の弾性係数である。

このように斜材モデルを全方向に成立するように拡張した場合，その関係式は(2)式に示したラメの式となる。すなわち，斜材モデルは全方向に拡張することにより，ラメの式と等価なモデルとなる。

（３）ラメの式の修正

以上を踏まえた上で，ラメの式を物理的解釈がしやすい形に修正しておく。

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{\lambda}+\sigma_{ij}^{\mu}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij} \tag{37}$$

σ_{ij} は外部応力を示し，σ^{λ}_{ij} は内部応力のうち，斜材が受け持つ等方応力分（以下，等方内部応力と呼ぶ）を，σ^{μ}_{ij} は内部応力のうち，標準材が受け持つ非等方応力分（以下，非等方内部応力と呼ぶ）を示す。外部応力と内部応力の合計とがつりあうことを示しているのが，左式と中央の式との関係である。また，中央の式と右式の関係は，フックの法則であるひずみと応力の関係を表している。このように，等方内部応力と非等方内部応力を式に組み入れることにより，外部応力と内部応力のつりあいを明確に表示し，物理的解釈がしやすい形にしている。

（４）等方内部応力仮説の提案

以上のように，等方弾性体であれば等方内部応力と非等方内部応力という２種類の内部応力の存在を仮定することができる。この仮説を提案することが本論文の主旨であり，この仮説をフックの法則に関する等方内部応力仮説と呼ぶ。

この仮説は，等方内部応力により生じる横方向への引張応力が，１軸圧縮においても存在することを予想する。これにより，コンクリートのような脆性材料の圧縮破壊を引張応力によって説明できる可能性が生まれる。これは，斜材モデルにあてはめた場合でいえば，引張破壊も圧縮破壊も標準材がある引張応力（引張強度）に達した際に生じるといった考え方である。

Ⅲ．完全脆性材料の破壊基準による検証

１．検証方法

提案した等方内部応力仮説を実証するためには内部の応力状態を把握する必要があるが，これまでに内部応力を直接測定する技術は開発されていない。そのため，実験的に仮説を証明することは困難と考えられる。そこで，この仮説から理論的に導かれる破壊基準が現実の破壊を説明できることを示し，間接的に仮説の妥当性を検証する。

２．新たな破壊基準の検討準備

（１）斜材モデルと破壊基準

Ⅱ章にて斜材モデルを用いてフックの法則の新たな視点について説明したが，以下の検討でも分かり易くするため，部分的に斜材モデルを利用する。斜材モデルは主応力方向以外の応力（せん断応力）に対しては非等方性となるため応力-ひずみ関係を正しく記述できないが，主応力方向については正しく記述できるため，破壊基準等の検討では特に問題にならない。すべての応力状態は，主応力方向の応力状態に変換可能だからである。

（２）修正したラメの式の各項の名称

今後の説明のために，修正したラメの式の各項に名称を付ける。(37)式中の σ_{ij} を外部応力項，σ^{λ}_{ij} を等方内部応力項，σ^{μ}_{ij} を非等方内部応力項，$\sigma^{\lambda}_{ij}+\sigma^{\mu}_{ij}$ を内部応力項，$\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$ をラメの式の第一項，$2\mu\varepsilon_{ij}$ をラメの式の第二項とそれぞれ呼ぶことにする。

（３）等方内部応力比 n について

検討を簡単にするために，１軸圧縮の単位ベクトルが作用した場合の応力を**エラー！参照元が見つかりません。**式，**エラー！参照元が見つかりません。**式のように表現する。これは，(37)式を主応力方向のベクトル表示にしたものである。左式が外部応力項の単位ベクトルを示し，中央式の第一項が等方内部応力項，中央式の第二項が非等方内部応力項を示す。また，右式は一般的なラメの式である。ここで，n は１軸の単位応力が作用した際に発生する等方応力の割合を示す指標であり，等方内部応力比として定義する。以下，圧縮を正とする。なお，３次元の場合と区別するために，２次元の等方内部応力比 n を記号では n_2 と次元の添字をつけて以下に記述する。

２次元の場合

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_2\\n_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-n_2\\-n_2\end{pmatrix}=\lambda_2\varepsilon\begin{pmatrix}1-\nu_2\\1-\nu_2\end{pmatrix}+2\mu_2\varepsilon\begin{pmatrix}1\\-\nu_2\end{pmatrix} \tag{38}$$

３次元の場合

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\\n\\n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-n\\-n\\-n\end{pmatrix}=\lambda\varepsilon\begin{pmatrix}1-2\nu\\1-2\nu\\1-2\nu\end{pmatrix}+2\mu\varepsilon\begin{pmatrix}1\\-\nu\\-\nu\end{pmatrix} \tag{39}$$

上式の n，ν の関係より，n はポアソン比 ν により表現でき，２次元，３次元に関わらず次の式となる。

$$n_2=\frac{\nu_2}{1+\nu_2}\ ,n=\frac{\nu}{1+\nu} \tag{40}$$

前述したように，２次元等方弾性体では $0\leqq\nu_2\leqq1$，３次元等方弾性体では $0\leqq\nu\leqq0.5$ であるとすれば，式より，２次元等方弾性体では $0\leqq n_2\leqq0.5$，３次元等方弾性体では $0\leqq n\leqq1/3$ となる。

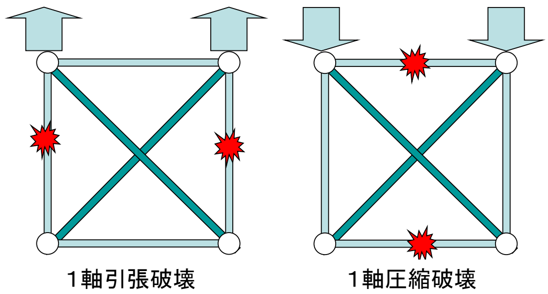

Fig.10　斜材モデルによる破壊

(Failure by Diagonal Model)

ポアソン比は，１軸圧縮が作用した際の横ひずみを縦ひずみで除した値に負号をつけたものである。縦ひずみは非等方内部応力と等方内部応力の両方の影響を受けたひずみであり，この縦ひずみで除した値であるポアソン比は物理的意味が明瞭ではない。n を導入することにより，応力の等方成分と非等方成分が明確になり，物理的解釈が明瞭になるため，以下ではポアソン比に代わり等方内部応力比 n を用いる。なお，工学的にはポアソン比で表現した方が便利である場合も多いので，その場合は(40)式を用いて変換すればよい。

３．新たな破壊基準

（１）新たな破壊基準の概要

斜材モデルによれば，等方弾性体は標準材と斜材の独立した２つの応力-ひずみ関係の足し合わせにより表現できる。このように標準材と斜材がそれぞれ独立と考えた場合，標準材と斜材それぞれに破壊条件を設定する新たな破壊基準が定義できると考えることは自然な発想と思われる。

今回の検討では，等方内部応力項と非等方内部応力項のうち，非等方内部応力項に対して破壊条件を設定する。今回の検討で扱いたい破壊現象は具体的にはコンクリートなどの引張による脆性破壊である。これは方向性のある破壊であることから，等方内部応力項に破壊基準を設定するのは合理性に欠ける。

非等方内部応力項に対して設定できる破壊条件はいろいろあるが，可能な限り単純な場合から考えていくこととしたい。そこで，これまでに提案されている破壊基準の中で最も単純な最大引張応力基準を非等方内部応力項に対して採用する。すなわち，斜材モデルにあてはめると，標準材がある引張強度に達した際に破壊し，圧縮に対して標準材は破壊しないとする破壊基準である (Fig.10)。この基準は現在提案されている破壊基準の中では最も簡単な部類に入る[2)]。

なお，同じような破壊基準に Rankine によって定義された最大引張応力基準[6)] がある。この基準との違いは，Rankine の基準が最大引張応力を等方内部応力項と非等方内部応力項の和である内部応力項（＝外部応力項）に対して適用して

いるのに対し，新たな破壊基準では非等方内部応力項のみに対して適用する点にある。

新たな破壊基準（以下，他の破壊基準と区別するために非等方内部応力の破壊基準と呼ぶ）の破壊条件を数式により表現すると次の式になる。なお，$\sigma^{\mu}{}_1$，$\sigma^{\mu}{}_2$，$\sigma^{\mu}{}_3$は非等方内部応力の主応力成分とし，$-f$は標準材の引張強度である。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\lambda} + \sigma_{ij}^{\mu} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{41}$$

$$\sigma_1^{\mu} = -f \;\; or \;\; \sigma_2^{\mu} = -f \;\; or \;\; \sigma_3^{\mu} = -f$$

以上，引張により脆性破壊する等方弾性体の破壊基準を新たに定めたので，この式から演繹される結果について以下で検討する。

（2）圧縮強度，引張強度および純せん断強度の理論値

(a) 1軸圧縮強度の理論値

1軸圧縮が作用すると，斜材を介して横方向の標準材に引張応力が生じる。その結果として，載荷方向と直交方向に引張破壊する。この理論によれば圧縮強度を標準材の引張強度$-f$によって説明することが可能になる。すなわち，**エラー! 参照元が見つかりません。**式，**エラー! 参照元が見つかりません。**式より非等方内部応力項の成分である$-n$が引張強度$-f$に達した場合に，圧縮破壊が生じることになる。よって，1軸単位応力をf/n倍したものが1軸圧縮強度となる。外部応力項と内部応力項をベクトル表記すると次の式となる。

2次元の場合

$$\frac{f}{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{f}{n_2}\left[\begin{pmatrix}n_2\\n_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-n_2\\-n_2\end{pmatrix}\right] \tag{42}$$

3次元の場合

$$\frac{f}{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{f}{n}\left[\begin{pmatrix}n\\n\\n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-n\\-n\\-n\end{pmatrix}\right] \tag{43}$$

(b) 1軸引張強度の理論値

1軸引張が作用すると，斜材も引張応力の一部を負担するため，標準材の引張強度よりも大きな1軸引張応力が作用しなければ標準材は引張破壊しない。そのため，標準材の引張強度よりも1軸引張強度は大きくなる。**エラー! 参照元が見つかりません。**式，**エラー! 参照元が見つかりません。**式より非等方内部応力項の成分である$(1-n)$が引張強度$-f$に達した場合に，引張破壊すると考えられる。よって，1軸単位応力を$-f/(1-n)$倍したものが1軸引張強度となる。外部応力項と内部応力項をベクトル表記すると次式となる。

2次元の場合

$$-\frac{f}{(1-n_2)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -\frac{f}{(1-n_2)}\left[\begin{pmatrix}n_2\\n_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-n_2\\-n_2\end{pmatrix}\right] \tag{44}$$

3次元の場合

$$-\frac{f}{(1-n)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -\frac{f}{(1-n)}\left[\begin{pmatrix}n\\n\\n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-n\\-n\\-n\end{pmatrix}\right] \tag{45}$$

(c) 純せん断強度の理論値

純せん断強度とは，ここでは純せん断の応力が作用した場合の強度と考える。すなわち，主応力方向に引張と圧縮が作用し，体積変化がない場合の引張方向の強度と考える。純せん断の場合，体積変化が生じないために斜材に応力が生じず，純粋に標準材にだけ応力が発生する。そのため，標準材の引張強度と斜材モデルの純せん断強度は一致する。よって，斜材モデルに最大引張応力基準を適用した場合，理論上の純せん断強度は$-f$となる。外部応力項と内部応力項をベクトル表記すると次の式となる。

2次元の場合

$$f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = f\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] \tag{46}$$

3次元の場合の一例

$$f\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = f\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right] \tag{47}$$

以上，非等方内部応力の破壊基準から導かれる強度の理論値を示した。この理論の利点は，すべての強度を標準材の引張強度$-f$により表現できる点にある。

以上，強度の理論値について，**エラー! 参照元が見つかりません。**式，**エラー! 参照元が見つかりません。**式より代数的に計算を行ったが，代数的な計算では物理的な解釈が不明瞭になるため，以下では応力空間上にベクトル表示することで，非等方内部応力の破壊基準による破壊面について考察する。

4．破壊面の形と等方内部応力比の関係

（1）1次元の場合

1次元の場合，線材が強度$-f$に達した場合に破壊する。ポアソン比νや等方内部応力比n，第一ラメ定数λも存在しないため，特に検討は必要ない。

（2）2次元の場合の破壊面

(a)破壊面について

現在一般的な破壊面の表現は，非等方内部応力項に対してではなく，内部応力項（＝外部応力項），すなわち等方内部応力と非等方内部応力の和に対して行われている。そのため，非等方内部応力項だけの破壊面を説明しても，これまでの破壊面と直接比較することができず，その妥当性について検討することができない。そこで，非等方内部応力項に適用された最大引張応力基準に等方内部応力項を加えた場合の破壊面を以下で論じ，考察を行う。

説明を簡単にするために，まずは2次元等方弾性体の破壊面について説明する。本質的な部分は3次元についても変わりがないため，3次元への拡張は容易である。

(b)応力空間上の破壊面

応力空間の挙動を Fig. 11 に示す。非等方内部応力項に適用された最大引張応力基準は応力空間においては破壊面1（$\sigma^{\mu}{}_1 = -f$ or $\sigma^{\mu}{}_2 = -f$）で表される。なお，無負荷の等方弾性体の初期状態を静水圧軸上の座標 $0\ (0, 0)$ にとるものとする。1軸圧縮（又は引張）が作用して破壊する場合，非等

方内部応力ベクトルは OA（又は OA'）で表現され，等方内部応力ベクトルは静水圧と平行である AB（又は AB'）で表現される。足し合わせたものが外部応力ベクトルである OB（又は OB'）であり，これが１軸圧縮（引張）強度となる。それぞれのベクトルを表現すると次式となる。

$$\overrightarrow{OA} = \frac{f}{n_2}\begin{pmatrix} 1-n_2 \\ -n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f(1-n_2)}{n_2} \\ -f \end{pmatrix} \tag{48}$$

$$\overrightarrow{OA'} = -\frac{f}{(1-n_2)}\begin{pmatrix} 1-n_2 \\ -n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f \\ \frac{n_2 f}{(1-n_2)} \end{pmatrix} \tag{49}$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{f}{n_2}\begin{pmatrix} n_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = -\frac{f}{(1-n_2)}\begin{pmatrix} n_2 \\ n_2 \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{f}{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{n_2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$\overrightarrow{OB'} = -\frac{f}{(1-n_2)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f}{(1-n_2)} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

すなわち，非等方内部応力だけに関しての破壊点である A 点は，等方内部応力を考慮すると B 点に移動する。

(48)式または(49)式から明らかなように，非等方内部応力ベクトル OA（又は OA'）の向きは，等方内部応力比 n_2 によって異なる。すなわち，ポアソン比 ν_2 によって異なることになる。式よりベクトル OA は等方内部応力比 n_2 が 0.5 の場合，静水圧軸に直交する。また，等方内部応力比が 0 の場合，σ_1 軸（又は σ_2 軸）と平行になる。以上が，１軸圧縮（引張）が作用した場合の応力空間内の挙動である。

純せん断の力が作用した場合，非等方内部応力ベクトルは静水圧軸に直交するベクトル OS（又は OS'）となり，S 点（又は S' 点）で純せん断強度に達して破壊する。ベクトル OS（又は OS'）を表現すると次式となる。

$$\overrightarrow{OS} = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -f \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$\overrightarrow{OS'} = f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f \\ f \end{pmatrix} \tag{55}$$

なお，純せん断の力が作用した場合，等方内部応力が発生しないため，等方内部応力を考慮しても S 点のままであり，移動しない。

非等方内部応力に関する最大引張応力基準の破壊面を，等方内部応力を含めた内部応力の破壊面に変換するのは線形変換であるため，直線は直線に，平面は平面に変換される。結局，破壊面は S 点と B 点を結んだ直線および S' 点と B' 点を結んだ直線で表現できる。すなわち，非等方内部応力の最大引張応力基準である破壊面１は，一般的に破壊面と呼ばれている等方内部応力を含む表現に変換すると破壊面２となる。

以上より，破壊面は等方内部応力比 n_2 によって傾きが異なり，Fig. 12 のように変化する。n_2 が大きくなるにつれて破壊面は静水圧軸に平行になっていく。なお，先述したように，S 点および S' 点は変換により移動しないため，等方内部応力比の変化に対して不動点になる。

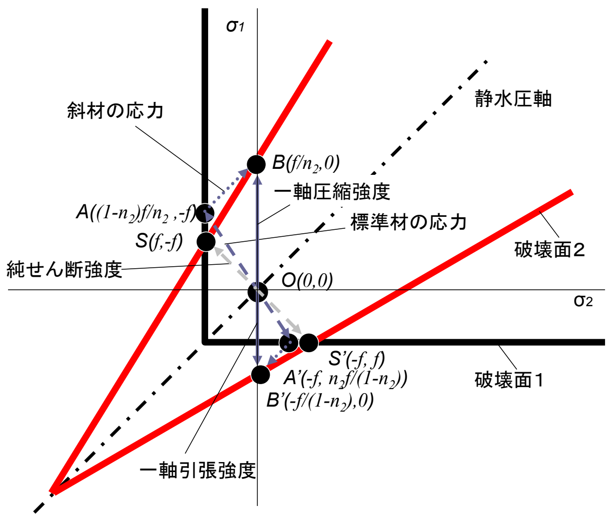

Fig.11　主応力空間（２次元）
(Principal-Stress Space (2D))

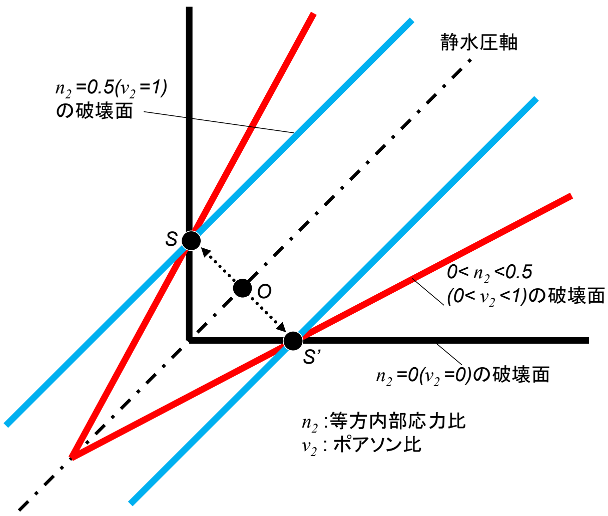

Fig.12　ポアソン比と破壊面（２次元）
(Failure Surface with Poisson's Ratio (2D))

(c) 破壊面の式

以上の結果より，応力空間における座標は S, A, B, S', A', B' 点について Fig. 11 のように定まる。これより破壊面の方程式は次の２つの式となる。なお，t は媒介変数である。式より，破壊面の傾きは n_2 によって変化する。n_2 が 0（$\nu_2=0$）の場合，破壊面は破壊面１と同じである。また，n_2 が 0.5（$\nu_2=1$）の場合，破壊面は静水圧軸に平行である。

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(1-n_2)f}{n_2} \\ f \end{pmatrix} t \tag{56}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n_2 f}{(1-n_2)} \\ f \end{pmatrix} t \tag{57}$$

また，静水圧軸と破壊面の角度 θ は，内積の計算より次式となる。

（３）３次元の場合の破壊面

(a)応力空間上の破壊面

２次元の場合の破壊面と同様に，３次元の破壊面について検討する。以下，子午面の挙動を２次元の場合と同じように説明していく。なお，子午面とは，圧縮子午線と引張子午線によって切断される平面である。

応力空間の挙動を Fig. 13 に示す。非等方内部応力項に適用された最大引張応力基準は応力空間においては破壊面１（$\sigma^{\mu}{}_1=-f$ *or* $\sigma^{\mu}{}_2=-f$ *or* $\sigma^{\mu}{}_3=-f$）で表される。なお，無負荷の等方弾性体の初期状態を静水圧軸上の座標 *O(0, 0, 0)* にとるものとする。２次元の場合と同様の操作を行うと，非等方内部応力の最大引張応力基準である破壊面１は，一般的に破壊面と呼ばれている等方内部応力を含む表現に変換すると破壊面２となる。２次元の場合と同様にこの変換は線形変換であり，直線は直線に，平面は平面に変換される。破壊面１は応力空間に立体で表現すると三角錐であるため，線形変換された破壊面２も三角錐となる。Fig. 14 に示すように，三角錐の角度が等方内部応力比によって異なることは，２次元の場合と同様である。π 平面上（*O* 点を通り静水圧軸に垂直な平面）の破壊はすべて純せん断による破壊になるため，等方内部応力比の変化に対して不動になる。それぞれのベクトルを次に示す。

$$\overrightarrow{OA}=\frac{f}{n}\begin{pmatrix}1-n\\-n\\-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{f(1-n)}{n}\\-f\\-f\end{pmatrix} \tag{59}$$

$$\overrightarrow{OA'}=-\frac{f}{(1-n)}\begin{pmatrix}1-n\\-n\\-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-f\\\frac{nf}{(1-n)}\\\frac{nf}{(1-n)}\end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\overrightarrow{AB}=\frac{f}{n}\begin{pmatrix}n\\n\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\f\\f\end{pmatrix} \tag{61}$$

$$\overrightarrow{A'B'}=-\frac{f}{(1-n)}\begin{pmatrix}n\\n\\n\end{pmatrix} \tag{62}$$

$$\overrightarrow{OB}=\frac{f}{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{f}{n}\\0\\0\end{pmatrix} \tag{63}$$

$$\overrightarrow{OB'}=-\frac{f}{(1-n)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{f}{(1-n)}\\0\\0\end{pmatrix} \tag{64}$$

$$\overrightarrow{OS}=f\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2f\\-f\\-f\end{pmatrix} \tag{65}$$

$$\overrightarrow{OS'}=f\begin{pmatrix}-1\\0.5\\0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-f\\0.5f\\0.5f\end{pmatrix} \tag{66}$$

(b)破壊面の式

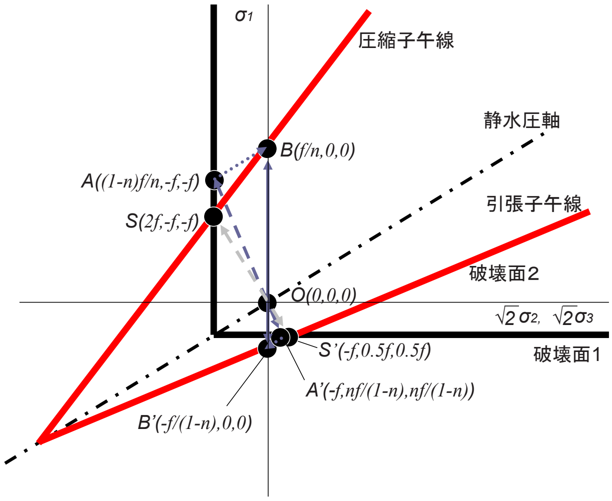

Fig.13　主応力空間（３次元）

(Principal-Stress Space (3D))

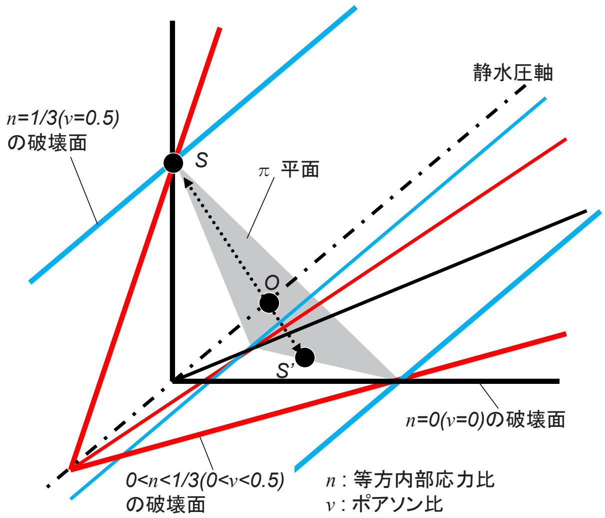

Fig.14　ポアソン比と破壊面（３次元）

(Failure Surface with Poisson's Ratio (3D))

以上の結果より，応力空間における座標は *S, A, B, S', A', B'* 点について Fig. 13 のように定まる。これより破壊面の子午線の方程式は次の２つの式となる。なお，t は媒介変数である。式より，破壊面の傾きは n によって変化する。n が *0*（$\nu=0$）の場合，破壊面は破壊面１と同じである。また，n が *1/3*（$\nu=0.5$）の場合，破壊面は静水圧軸に平行である。

圧縮子午線

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2f\\-f\\-f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{(1-2n)f}{n}\\f\\f\end{pmatrix}t \tag{67}$$

引張子午線

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-f\\ 0.5f\\ 0.5f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{nf}{(1-n)}\\ 0.5f\\ 0.5f\end{pmatrix}t \qquad (68)$$

また，静水圧軸と破壊面の角度θは，内積の計算より次式となる。

圧縮子午線

$$\cos\theta=\frac{\frac{1-2n}{n}+1+1}{\sqrt{\left(\frac{1-2n}{n}\right)^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3(6n^2-4n+1)}} \qquad (69)$$

引張子午線

$$\cos\theta=\frac{\frac{2n}{1-n}+1+1}{\sqrt{\left(\frac{2n}{1-n}\right)^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{3(6n^2-4n+2)}} \qquad (70)$$

以上，斜材モデルと非等方内部応力の破壊基準から導かれる破壊面についての考察を行った。

５．コンクリートの破壊面に関する実験値と理論の比較

これまでは理論のみを扱い，フックの法則に関する等方内部応力仮説と非等方内部応力の破壊基準から導かれる破壊面について，その概要を示してきた。以下では，これらの理論と実験より得られた破壊面とを比較し，理論の妥当性について検討する。なお，非等方内部応力の破壊基準は，完全脆性材料を対象としているため，現実の材料の実験結果と完全には一致しないが，ある程度の妥当性は示すことができると考えている。

現在までに，最も深く研究されてきた脆性材料として，コンクリートはその代表的なものである。そこで，コンクリートの３軸圧縮実験結果と理論値とを比較してFig. 15に示す。実験結果は３軸圧縮強度（σ_{1f}: 側面の応力，σ_{3f}: 軸方向の応力）であり，１軸圧縮強度で無次元化している。(67)式より，コンクリートのポアソン比νを*1/6*（$n=1/7$）とした場合，圧縮子午線の傾きは*5*となり，ポアソン比νを*1/5*（$n=1/6$）とした場合，圧縮子午線の傾きは*4*となる。当時のコンクリートのポアソン比は概ねこの範囲にあると考えられる。圧縮子午線を図中に示すとよい一致を示す。

以上，等方内部応力仮説を用いた非等方内部応力の破壊基準により，脆性材料であるコンクリートの現実的な破壊が説明できることを確認した。これにより間接的にではあるが，等方内部応力仮説が現実的な仮説であることを示した。

Ⅳ．まとめ

ポアソン比を用いずに，力のつりあいから斜材モデルを用いて一般化フックの法則を検討し，内部応力に関する仮説を導きだした。また，完全脆性材料の破壊基準として，仮説から導かれる非等方内部応力の破壊基準を提案し，その性質を検討した。その結果，以下の結論が得られた。

①斜材モデルから主応力方向について，一般化フックの法則と同一の物性値の関係を導くことができる。

②斜材モデルによれば，３次元等方弾性体のポアソン比は理論的に $0\leqq\nu\leqq0.5$ となる。

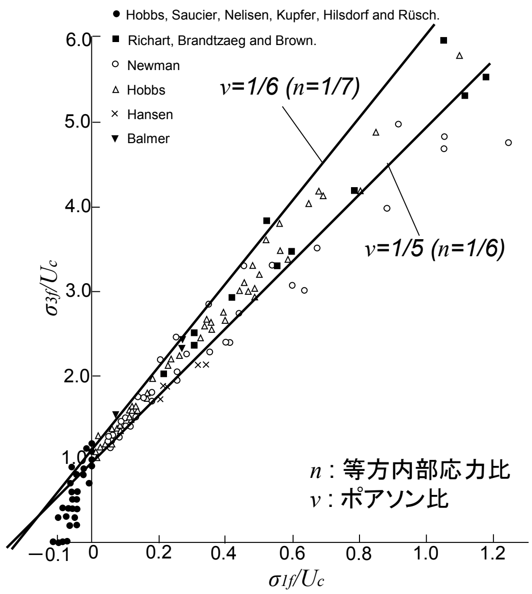

Fig.15　コンクリートの破壊面と実験値

Failure Surface and Experimental Data of Concrete[7)]

③せん断弾性係数μの物理的意味は，斜材モデルにおいては，x，y，zの各方向に関する標準材の弾性係数である。

④第一ラメ定数λの物理的意味は，斜材モデルにおいては，x，y，zの各方向に関する斜材の弾性係数である。

⑤斜材モデルを主応力方向以外の全方向にも拡張することで，ラメの式の物理的解釈が可能となる。

⑥等方弾性体であれば等方内部応力と非等方内部応力という２種類の内部応力の存在を仮定できる。この仮説をフックの法則に関する等方内部応力仮説と呼ぶ。

⑦等方内部応力仮説は，等方内部応力により生じる横方向への引張応力が，１軸圧縮においても存在することを予想する。これにより，コンクリートのような脆性材料の圧縮破壊を引張応力によって説明できる可能性が生まれる。

⑧純せん断載荷した際の主引張方向の強度を $-f$ とした場合，１軸引張強度は $-f/(1-n)$，１軸圧縮強度は f/n で表現される。ここで，nは等方内部応力比であり，ポアソン比の関数である。

⑨破壊面は三角錐であり，子午線の角度はポアソン比に依存して変化する。

⑩等方内部応力仮説を用いた非等方内部応力の破壊基準により，脆性材料の現実的な破壊を説明できる。これにより間接的にではあるが，等方内部応力仮説が現実的な仮説であることを示した。

参考文献

1）Timoshenko, S.P.: HISTORY OF STRENGTH OF MATERIALS, McGraw-Hill Book Company, 1953, pp.216-222.

2）Chen, W.F.:PLASTICITY IN REINFORCED CONCRETE,

McGraw-Hill Book Company, 1982, pp.76-78.
3) Sokolnikoff, I.S.: Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, 1946, p.61.
4) Gutenberg, B.: Physics of the Earth's Interior, Academic Press, 1959, p.165.
5) Gercek, H.: Poisson's ratio values for rocks, International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, Vol.44, 2007.1, p.3.
6) Chen, W.F.：PLASTICITY IN REINFORCED CONCRETE, McGraw-Hill Book Company,1982, p.204.
7) 日本建築学会：鉄筋コンクリート終局強度設計に関する資料，丸善, 1987.9，p.5

A Study on an Extended Model of Hooke's Law to 3D

Yohei Inaba

Hooke's law, which is one of the most important laws in the field of mechanics, states that stress and strain are proportional to each other. The physical meaning of Lamé's first constant λ, however, has not been clarified. The use of an equation whose physical interpretation is unknown poses a major obstacle to examining the theory further; utmost effort should be made to give the equation some physical interpretation.

In this study, a method of constructing a model using the one-dimensional Hooke's law was proposed to theoretically extend the law to two and three dimensions. The results were then used to examine the physical meaning of λ and to propose the internal hydrostatic stress hypothesis. In order to validate the hypothesis, the failure criteria were derived from the internal hydrostatic stress hypothesis, and the theoretical strength of perfectly brittle materials was obtained. Also, the validity of the hypothesis was verified by comparing theoretical and experimental strengths.

The study revealed the following possibilities:

1. The concept of internal hydrostatic stress can be applied to isotropic materials. This is called the internal hydrostatic stress hypothesis concerning Hooke's law.
2. The internal hydrostatic stress hypothesis predicts the presence of tensile stress generated by internal hydrostatic stress in the transverse direction even in uniaxial compression.
3. It was confirmed that the failure criteria derived from the internal hydrostatic stress hypothesis can be used to explain the actual failure of brittle materials.