鹿島技術研究所年報
第68号 2020年12月1日

面対面の多点拘束を用いた有限要素法の静的問題での精度検証

A Study on the Accuracy of the Finite Element Method with Face-to-Face Multi-Point Constraints in Static Problems

坂　敏秀　山東　篤[1)]　小磯利博

要　約

本報告では，２つの不整合なメッシュを結合するための面対面の多点拘束を用いた有限要素法について，静的問題での例題を用い，結合面での変位・応力・拘束表面力の精度を確認する。また，点対面の多点拘束の結果と精度を比較し，面対面の方法の優位性を示す。主たる結論として，①線形変位場の問題に対して，点対面の方法は厳密解を再現できないのに対し，面対面の方法は厳密解を再現可能なこと，②点対面の方法より面対面の方法は結合位置の変位と応力の評価が高精度なこと，③多点拘束条件を設定する際にスレーブ面を選ぶ必要があるが，面対面の方法では，粗なメッシュ面または軟らかい方のメッシュ面を選ぶのがよいことを，具体例により示す。

目　次

Ⅰ．はじめに
Ⅱ．多点拘束解析の概略
Ⅲ．点対面と面対面の方法の比較
Ⅳ．面対面の方法でのスレーブ面の影響
Ⅴ．おわりに

Ⅰ．はじめに

近年，構造物の応力状態や損傷状態を評価するにあたり，シェル要素やソリッド要素を用いた有限要素法によって構造物全体を解析する技術が実用化されつつある[1)]。これらの要素を用いることで，部材の損傷や破壊といった現象を簡略化することなく，内部の応力状態や損傷状態を評価できる。また，実際の構造物は地盤に支持されているため，構造物の応答は地盤の影響を大きく受ける[2)]。そのため，周辺地盤を含めたモデル化による大規模解析が行われている[3)]。このような周辺地盤を含めた構造物全体を解析する技術は今後広く使われていくと予想される。

ソリッド要素で構造物や地盤をモデル化する場合，柱梁構造の建築物は複雑な形状の部材が多数組み合わさっているため，すべての部材のメッシュが整合した一体モデルを作成するのは困難が伴う。また，地盤を含む構造物のモデルでは，複雑な地盤条件を適切にモデル化しつつ，構造物のメッシュと整合させるのは困難である[4)]。

そのため，建物と地盤で別々に[4)]，もしくは部材や接合部などの部位ごとに[5)]メッシュを作り，多点拘束により界面を結合するアセンブリ構造解析[6)]の適用が考えられる。このモデリング方法を用いると，メッシュの整合性を考慮することなく部分構造ごとに効率的なメッシュを作成できる。また，部分構造間にギャップ要素を配置することで，部分構造間の接触剥離や摩擦すべりなどの接触現象を簡単にモデル化できる拡張性も期待できる。

著者らは，このような構造解析を実現するために，El-Abbasi and Bathe[7)]の方法に着目した。El-Abbasi and Batheの方法では，メッシュの結合面での変位分布と表面力分布の整合性の両方を仮定する。著者らは，文献７で示された２次元モデルでの辺対辺の多点拘束を３次元モデルの面対面の多点拘束として実現するため，不整合な２つのメッシュにしたがって，適切に形状関数を評価して結合面内で厳密に積分を評価する山東の積分法[8,9)]を適用し，El-Abbasi and Batheの方法を３次元で実現した[10)]。

なお，El-Abbasi and Bathe の方法は，non-conforming mortar method[11)]（以後，モルタル有限要素法と呼ぶ）として紹介されている方法と本質的に一致している。このモルタル有限要素法を３次元に拡張したものが文献 12 で示されており，接触解析での解析精度を点対面の方法と比較している。

１）和歌山工業高等専門学校　National Institute of Technology (KOSEN), Wakayama College

キーワード：有限要素法，多点拘束，面対面，点対面，創成解，精度
Keywords: finite element method, multi-point constraint, face-to-face, node-to-face, manufactured solution, accuracy

しかし，比較項目がマクロな荷重変位関係や接触面の軸力などであり，結合面近傍の変位や応力の精度は定量的に評価されていない。また，El-Abbasi and Bathe の方法とモルタル有限要素法では，結合面での表面力分布を，２つの結合面のいずれかの形状関数の一次結合で定めるべきか指標が示されていない。

そこで，本報告では，El-Abbasi and Bathe の方法（以後，面対面の方法と呼ぶ）によって不整合なメッシュを持つ３次元のモデルを有限要素法で解析するため，結合面の変位と表面力に着目し，点対面の多点拘束との精度の比較，結合面の表面力分布を定義する面（スレーブ面）の選び方について検討する。なお，スレーブ面の選び方については，文献 13 でパラメトリックスタディを実施したが，採用したメッシュの一部が粗く，得られた結論にメッシュの悪影響が懸念されるため，本稿では文献 13 より細かいメッシュで検討する。

本報告の構成は以下のとおりである。Ⅱ節では，本報告で検討に用いる多点拘束解析について，概略を示す。詳細は引用文献を参照されたい。Ⅲ節では，点対面の方法と面対面の方法の精度の良否を把握するために，単純な変位場の静的問題を設定し，結合面での変位と応力を比較する。Ⅳ節では，面対面の方法を用いる際に，結合面のどちらをスレーブ面として選ぶべきかを論じるための例題を解き，スレーブ面の選び方の指標を整理する。Ⅴ節にて本報告の内容をまとめる。

Ⅱ．多点拘束解析の概略

１．多点拘束条件を伴う静的解析 [10)]

まず，N次元の変位ベクトル$\mathbf{u}$を解に持つ静的問題を考える。この問題は，次の全ポテンシャルエネルギー$\Pi(\mathbf{u})$の最小化問題として解釈できる。

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T\mathbf{f} \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{K}$はN次元の剛性行列，$\mathbf{f}$はN次元の荷重ベクトルである。

次に，変位ベクトルに関するM個の拘束条件として式(2)を与えた静的問題を考える。

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2}$$

$\mathbf{C}$は多点拘束条件を表す係数行列で，M行N列である。この静的問題を本稿では多点拘束問題と呼ぶことにし，全ポテンシャルエネルギー$\Pi(\mathbf{u})$を式(2)の付帯条件のもとで最小化する問題と解釈する。

この付帯条件付き最小化問題に対して，ラグランジュ未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$を導入し，次のラグランジアン$L(\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda})$を定義する。

$$L(\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T\mathbf{f} + \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{C}\mathbf{u} \tag{3}$$

このラグランジアン$L(\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda})$が停留するときの$\mathbf{u}$が多点拘束問題の解の変位ベクトルである。

２．点対面の多点拘束条件 [3)]

4 節点マスター結合面に対する点対面の多点拘束条件の係数の求め方を示す。i方向$(i = 1,2,3)$の変位について，マスター結合面を構成する 4 節点の変位$\mathrm{u}_{M,i}^{a}$ $(a = 1,\ldots,4)$でスレーブ結合面の節点の変位$\mathrm{u}_{S,i}$を補間し，多点拘束条件の係数を導く。この考え方で得られる多点拘束条件の係数は，スレーブ節点座標でのマスター結合面の形状関数の値と一致する。ただし，本報告では，$\mathrm{u}_{M,i}^{a}$と$\mathrm{u}_{S,i}$は式(4)の双一次変位場に従うと仮定する。

$$\theta(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy \tag{4}$$

ここで，$\theta(x,y)$は変位場，α_iは変位場を表現する係数，x,yは結合面の直交座標を表す。

途中の式展開を省略するが，マスター4 節点とスレーブ節点の変位の関係を整理すると，次の多点拘束係数$\mathbf{c}$を得る。

$$\mathbf{c} = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_s)^T \tag{5}$$

$$\mathrm{u}_{S,i} = \mathbf{c}\mathbf{u}_{M,i}$$

$$\mathbf{u}_{M,i} = \lfloor \mathrm{u}_{M,i}^{1} \quad \mathrm{u}_{M,i}^{2} \quad \mathrm{u}_{M,i}^{3} \quad \mathrm{u}_{M,i}^{4} \rfloor^T$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_s = \lfloor 1 \quad x_s \quad y_s \quad x_sy_s \rfloor^T$$

ここで，(x_a,y_a) $(a = 1,\ldots,4)$と(x_s,y_s)はそれぞれ，マスター節点とスレーブ節点の座標である。

なお，上記の方法は，マスター結合面が長方形要素の場合は，マスター結合面上のスレーブ節点の自然座標を求める方法 [11), p.243] の結果と一致するが，長方形要素以外では異なる値となる。

本報告では，この多点拘束の方法を，点対面の方法と呼ぶ。

３．面対面の多点拘束条件 [10)]

３次元空間内のある面Γで２つのメッシュSとMを結合する際，結合面の各点において，２つのメッシュの変位ベクトルが一致するという条件として，i方向$(i = 1,2,3)$の変位の拘束条件を式(6)のように定める。

$$u_{S,i}(\boldsymbol{x}) - u_{M,i}(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ for } \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$は結合面内の点の座標，$u_{S,i}(\boldsymbol{x})$はメッシュSでの変位ベクトル，$u_{M,i}(\boldsymbol{x})$はメッシュMでの変位ベクトルである。

この条件式に相当するラグランジュ未定乗数項は，式(7)のように書ける。

$$\int_{\Gamma} \lambda_{S,i}(\boldsymbol{x}) \left(u_{S,i}(\boldsymbol{x}) - u_{M,i}(\boldsymbol{x}) \right) d\Gamma \tag{7}$$

ここで，$\lambda_{S,i}(\boldsymbol{x})$はラグランジュ未定乗数であり，結合する面に生じる表面力（以後，拘束表面力と呼ぶ）のi方向成分に相当する。この式が，面対面の多点拘束をラグランジュ未定乗数法で表現した際の付帯項である。

次に，この積分を離散化することを考える。まず，2つのメッシュで，それぞれ変位関数を離散化する。また，拘束表面力をメッシュSの形状関数を用いて離散化する。内挿に用いる形状関数を$N_S^a(\boldsymbol{x})$，$N_M^a(\boldsymbol{x})$としたとき，次のような補間式となる。

$$\lambda_{S,i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{n} N_S^a(\boldsymbol{x}) \lambda_{S,i}^a \tag{8a}$$
$$u_{S,i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{n} N_S^a(\boldsymbol{x}) \mathrm{u}_{S,i}^a \tag{8b}$$
$$u_{M,i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{m} N_M^a(\boldsymbol{x}) \mathrm{u}_{M,i}^a \tag{8c}$$

ここで，$\lambda_{S,i}^a$，$\mathrm{u}_{S,i}^a$，$\mathrm{u}_{M,i}^a$はそれぞれ，メッシュSの拘束表面力の節点値，メッシュSの変位の節点値，メッシュMの変位の節点値である。なお，メッシュS側はn個の形状関数，メッシュM側はm個の形状関数が定義されていると仮定した。

なお，拘束表面力の分布を定義したメッシュS側の面Γをスレーブ面，メッシュM側の面Γをマスター面と呼ぶことにする。

途中の式展開を省略するが，式(7)に対応する多点拘束条件の係数行列は式(9)で求めればよい。

$$\mathbf{C}_0 = \int_{\Gamma} \boldsymbol{N}_A^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{N}_B(\boldsymbol{x})\, d\Gamma \tag{9}$$

$$\boldsymbol{N}_A(\boldsymbol{x}) = \lfloor N_S^1(\boldsymbol{x}) \quad \dots \quad N_S^n(\boldsymbol{x}) \rfloor$$
$$\boldsymbol{N}_B(\boldsymbol{x}) = \lfloor N_S^1(\boldsymbol{x}) \quad \dots \quad N_S^n(\boldsymbol{x}) \quad -N_M^1(\boldsymbol{x}) \quad \dots \quad -N_M^m(\boldsymbol{x}) \rfloor$$

ここで，式(9)の係数行列$\mathbf{C}_0$はn行$n+m$列である。なお，式(9)はi方向の拘束条件に関する係数のはずだが，式(9)に添え字iは現れない。つまり，面対面の多点拘束の係数行列は成分iに依存せず，並進3方向で同一の係数となる。

Ⅲ．点対面と面対面の方法の比較

1．解析条件

検討対象は，一辺L=100 mm の立方体（$0 \leqq x \leqq 100$，$0 \leqq y \leqq 100$，$-50 \leqq z \leqq 50$）とし，Fig.1 に示す3種類のモデルを用いる。(a)は，上半分をxy面内で各辺7分割したメッシュ，下半分を同じく16分割したメッシュとし，これらの不整合メッシュを$z=0$の面で多点拘束条件により結合したモデルである。(b)は，上下ともにxy面内を各辺7分割した整合モデル，(c)は，上下ともにxy面内を各辺16分割した整合モデルである。

これらのモデルに対して，単純な変位場の創成解[14]を設定する。Table 1 に例題の条件，Table 2 に材料定数の値を示す。なお，創成解の方法では，最初に変位の厳密解を与え，

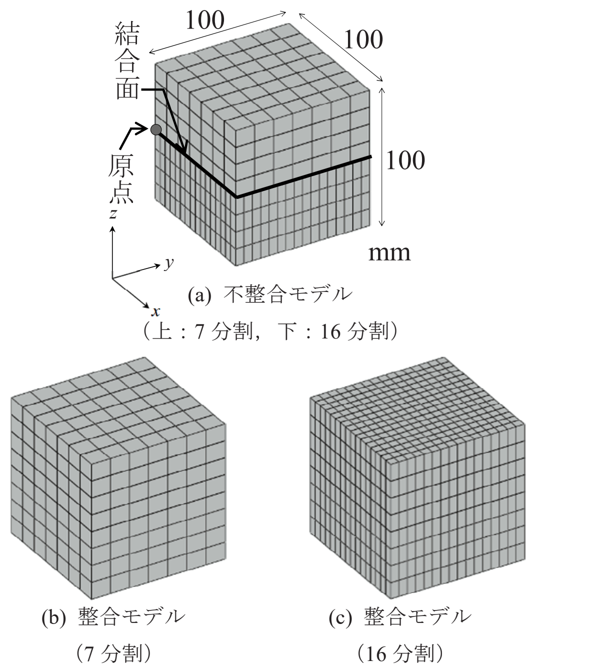


Fig.1　解析モデル（点対面と面対面の方法の比較）
(Numerical Models for Section III)

Table 1　解析条件（点対面と面対面の方法の比較）
(Boundary Conditions and Stress for Section III)

例題	条件	境界条件		強制変位	応力
		変位	荷重	(mm)	(N/mm²)
1	z方向単純引張	上下面	―	z方向 1.0	$\sigma_z = 250$
2	zx面内単純せん断	上下面	側面	x方向 1.0	$\tau_{zx} = 104.17$
3	y軸周り一定曲げ	上下面	―	z方向線形	$\sigma_z = -2E(x-50)/L^2$

Table 2　材料定数（点対面と面対面の方法の比較）
(Material Constants for Section III)

項目	変数	値	単位
ヤング係数	E	25,000	N/mm²
ポアソン比	ν	0.2	―
せん断弾性係数	G	10,417	N/mm²

ひずみ・応力等の厳密解を手計算で求める。次に，これらの変位と応力に対応する境界条件と物体力を解析モデルに与え，数値解析を実施し，精度を評価する。

例題1はz方向単純引張の問題で，x,y,z方向の変位の厳密解$u_x(x,y,z)$，$u_y(x,y,z)$，$u_z(x,y,z)$を式(10)の関数で与える。

$$u_x(x,y,z) = -\nu x/L \tag{10a}$$
$$u_y(x,y,z) = -\nu y/L \tag{10b}$$
$$u_z(x,y,z) = (z+50)/L \tag{10c}$$

式(10)の変位場から求まる応力分布は一定で，z方向の直応

力成分$\sigma_z(x,y,z)$=250 N/mm²以外の成分は0になる。

境界条件は，底面の節点でz方向固定の上，剛体変位を防ぐための単純支持の条件をx，y方向に与える。また，頂部の節点にz方向 1.0 mm の変位を強制変位として与える。荷重は与えない。

例題 2 はzx面内単純せん断の問題で，変位の厳密解を式(11)の関数で与える。

$$u_x(x,y,z) = (z+50)/L \quad (11a)$$

$$u_y(x,y,z) = 0 \quad (11b)$$

$$u_z(x,y,z) = 0 \quad (11c)$$

式(11)の変位場から求まる応力分布は一定で，x方向とz方向に関するせん断応力成分$\tau_{zx}(x,y,z)$=104.17 N/mm²以外の成分は0になる。

境界条件は，底面の節点でx方向固定の上，剛体変位を防ぐための単純支持の条件をy，z方向に与える。また，頂部の節点にx方向 1.0 mm の変位を強制変位として与える。荷重は，τ_{zx}に由来する表面力を側面の節点に与える。

例題 3 はzx面内曲げの問題で，変位の厳密解を式(12)の関数で与える。

$$u_x(x,y,z) = \frac{\nu}{L^2}(x-50)^2 - \frac{\nu}{L^2}(y-50)^2 + \frac{1}{L^2}(z+50)^2 \quad (12a)$$

$$u_y(x,y,z) = \frac{2\nu}{L^2}(x-50)(y-50) \quad (12b)$$

$$u_z(x,y,z) = -\frac{2}{L^2}(x-50)(z+50) \quad (12c)$$

式(12)の変位場から求まる応力はxに関する一次関数となり，z方向の直応力成分$\sigma_z(x,y,z) = -2E(x-50)/L^2$ N/mm²以外の成分は0になる。

境界条件は，底面の節点でz方向固定の上，剛体変位を防ぐための単純支持の条件をx，y方向に与える。また，頂部の節点に$-2(x-50)/L$ mm のz方向の変位を強制変位として与える。荷重は与えない。

精度検証に用いる指標は，Fig.2 に示す結合面の上側および下側の節点の変位および要素中心の応力とする。なお，不整合モデルの結果を評価する際には，上側は Fig.1(b)の整合モデル，下側は Fig.1(c)の整合モデルを参照解として比較する。また，誤差の基準は参照解の値とする。

また，各方法で，結合面の上下のいずれかをスレーブ面として選択できるが，今回は，点対面の方法では密なメッシュである下側をスレーブ面とし，面対面の方法では粗なメッシュである上側をスレーブ面とする。この選択は，両方の方法で有利[1), 4)]な条件である。

なお，本節の検討は市販ソフトウェア MSC Nastran を用いて実施する。

2．解析結果

例題 1 の結合面下側でのz方向変位u_zの分布とz方向の直応力成分σ_zの分布を Fig.3 に示す。変位・応力ともに，点対面の多点拘束の結果はいずれも二こぶの分布であり，参照解と一致していない。誤差は変位より応力で大きく，2.4%程度である。一方，面対面の多点拘束の結果は，参照解・厳密解と一致している。なお，例題 1 の誤差の分布形状は Fig.3 の相似形となる。

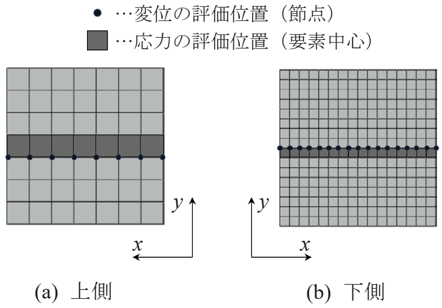


Fig.2　評価する結合面の節点と要素
(Nodes and Elements of Connecting Surface to be Evaluated Hereafter)

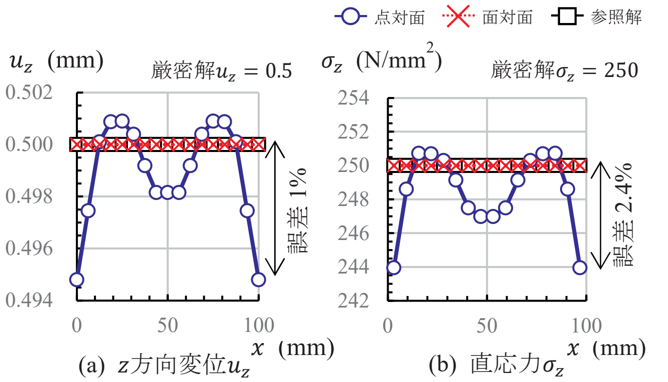


Fig.3　結合面下側の解（例題 1）
(Solutions on Lower Connecting Surface: Example 1)

例題 2 の結合面下側でのx方向変位u_xの分布とせん断応力成分τ_{zx}の分布を Fig.4 に示す。例題 1 と同様，変位・応力ともに，点対面の多点拘束の結果はいずれも二こぶの分布であり，参照解と一致していない。誤差は変位より応力で大きく，1%弱である。一方，面対面の多点拘束の結果は，参照解・厳密解と一致している。なお，例題 2 の誤差の分布形状は Fig.4 の相似形となる。

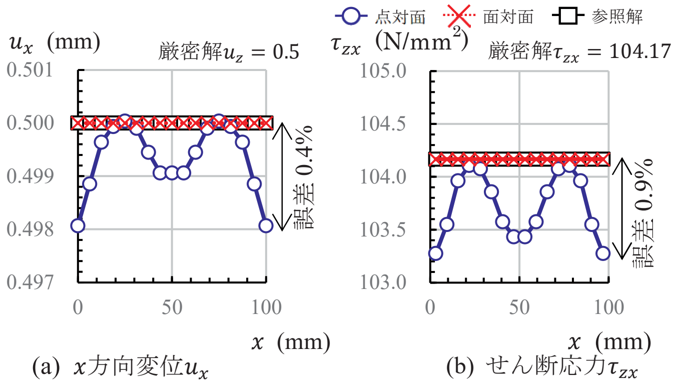
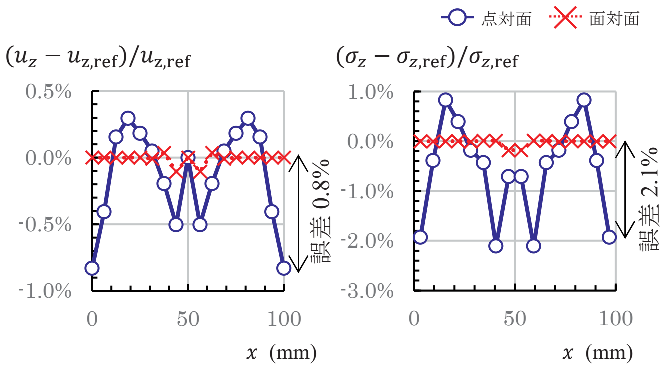


Fig.4　結合面下側の解（例題 2）
(Solutions on Lower Connecting Surface: Example 2)

例題 3 の結合面下側でのz方向変位u_zの相対誤差の分布とz方向の直応力成分σ_zの相対誤差の分布を Fig.5 に示す。なお，参照解の値を$u_{z,\mathrm{ref}}$と$\sigma_{z,\mathrm{ref}}$と表記する。変位・応力ともに，点対面の多点拘束の結果は参照解との誤差があり，参照解と一致していないことが分かる。誤差は変位より応力で大きく，2.1%程度である。一方，面対面の多点拘束の結果は，下側の中央で 0.2%程度の誤差が現れるものの，おおむね参照解と一致している。なお，図には示していないが，参照解は厳密解と一致せず，応力で最大 0.4%程度の誤差がある。



(a) z方向変位u_z　　(b) 直応力σ_z

Fig.5　結合面下側の相対誤差（例題 3）
(Relative Errors on Lower Connecting Surface: Example 3)

３．考 察

以上の結果により，結合面での変位の整合性のみを考慮して多点拘束条件を与える点対面の多点拘束では，有限要素法として本来再現可能な線形変位場の厳密解と解が一致しないことが分かった。また，誤差の分布はニこぶ状になる傾向が見られた。一方，誤差の大きさは高々2～3%程度であり，線形解析の手法としては十分な精度を持っていることが確認できた。ただし，一般の問題において同様の精度になるかどうかは別途確認が必要と思われる。

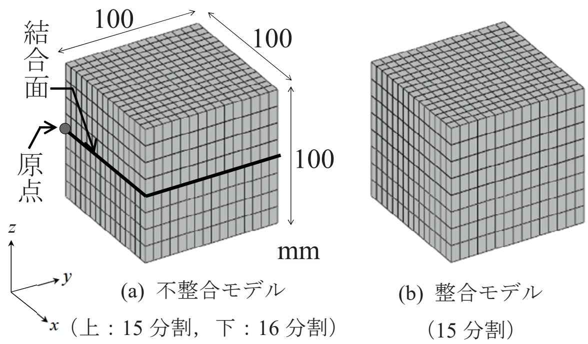
一方，結合面での変位の整合性だけでなく拘束表面力の分布も仮定する面対面の多点拘束では，線形変位場の厳密解を再現可能なことが分かった。また，厳密解を再現できない曲げの問題では，中央部に誤差が生じるものの，誤差の大きさは 0.2%程度と，点対面の方法よりも小さく，全体的には参照解と同様の解になることが確認できた。結合面近傍の変位や応力の精度が全体の解析精度に大きく影響を及ぼす場合，面対面の多点拘束が望ましいと言える。

Ⅳ．面対面の方法でのスレーブ面の影響

１．解析条件

（１）解析モデル

解析モデルは，前節と同様に，一辺が 100 mm の立方体を対象とし，立方体中央のxy平面を結合面として，寸法 100 mm × 100 mm × 50 mm の部分構造を上下に結合した多点拘束モデルとする。モデルは，上下の部分構造の要素分割が異なる不整合モデルと，上下の要素分割が一致している整合



(a) 不整合モデル（上：15 分割，下：16 分割）　(b) 整合モデル（15 分割）

Fig. 6　解析モデル（面対面のスレーブ選択の影響）
(Numerical Models for Ssection IV)

Table 3　材料定数（面対面の方法でのスレーブ面の影響）
(Material Constants for Section IV)

種類	ヤング係数 (N/mm^2)	ポアソン比
硬	25×10^3	0.2
軟	2.5×10^3	0.4

モデルを準備し，両者の結果を比較する。不整合モデルについては，上側の面内を n×n (n=15, 7)に分割し，下側の面内を 16×16 に分割した 2 種類とする。Fig.6(a)に，上側が 15×15 分割のモデル（分割比 15:16 モデル）を示す。なお，上側が 7×7 分割のモデル（分割比 7:16 モデル）は，Fig.1(a)と同一である。整合モデルは，上下の要素分割を面内 16×16, 15×15, 7×7 の 3 種類とする。Fig.6(b)に 15×15 のモデルを示す。

（２）載荷条件

本節では 2 種類の載荷条件を考える。一つ目の条件は，立方体に対し，曲げ変形のモードが生じるような強制変位を与える。上側上面が剛な面として挙動するような拘束を与え，剛な面の中心に対して，y軸周りに 0.05 rad の強制回転を与える。下側下面の節点では，すべての自由度を固定する。

二つ目の条件は，立方体に対し，軸変形のモードが生じるような強制変位を与える。上側上面が剛な面として挙動するような拘束を与え，剛な面の中心に対して，z方向に 1.0 mm の強制変位を与える。下側下面の節点では，すべての自由度を固定する。

（３）その他の条件

スレーブ面の選び方は，①上側，②下側の 2 種類とする。

材料は，硬いものと軟らかいものの 2 種類を想定する。Table 3 に，用いた材料定数を示す。

モデル中の物性比は，①上側・下側ともに硬（均一物性），②上側を軟・下側を硬（上軟下硬），③上側を硬・下側を軟（上硬下軟）とする 3 種類を想定する。

実施する解析ケースの一覧を Table 4 に示す。

なお，本節の検討は市販ソフトウェア HyperWorks を用いて実施する。

Table 4　解析ケースの一覧（面対面の方法でのスレーブ面の影響）
(List of Cases for Section IV)

名称	物性比	載荷	モデル	分割比	スレーブ面
A-1	均一物性	曲げ	不整合	15:16	上側
A-2				15:16	下側
A-3				7:16	上側
A-4				7:16	下側
A-5			整合	16:16	－
A-6				15:15	
A-7				7:7	
B-1	上軟下硬	軸	不整合	15:16	上側
B-2				15:16	下側
B-3				7:16	上側
B-4				7:16	下側
B-5			整合	16:16	－
B-6				15:15	
B-7				7:7	
C-1	上硬下軟	軸	不整合	15:16	上側
C-2				15:16	下側
C-3				7:16	上側
C-4				7:16	下側
C-5			整合	16:16	－
C-6				15:15	
C-7				7:7	

（4）比較方法

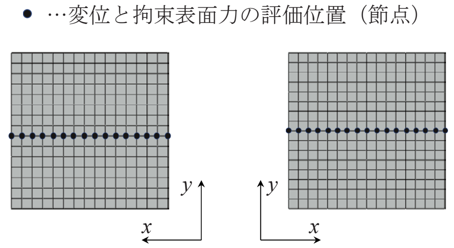
スレーブ面を結合面の上下どちら側に選ぶのがよいか把握するために，不整合モデルの解と整合モデルの解を比較する。比較する物理量は結合面の変位分布と拘束表面力分布とし，載荷モードに対応する主たる方向の成分に着目する。また，整合モデルの結果を基準とした相対誤差で評価する。なお，拘束表面力分布は文献 10 の手順に従って求める。拘束表面力は，式(8a)のとおりスレーブ側の分布のみが求まることに注意する。

15:16 モデルで評価する節点を Fig.7 に示す。なお，7:16 モデルで評価する節点は Fig.2 のものと同一である。

2．解析結果

得られた変位分布と拘束表面力分布の相対誤差を Fig.8～13 に示す。凡例の「上側」と「下側」は，スレーブ面をそれぞれ上側（粗側），下側（密側）で選んだモデルの結果を意味している。

Fig.8 に，均一物性で分割比 15:16 のモデルに，曲げモードを載荷した場合のz方向変位とz方向拘束表面力の相対誤差を示す。変位の相対誤差は最大 0.03%であり，上側と下側の違いはほとんどなく，整合モデルとよく一致している。拘束表面力の相対誤差は，上側で最大 0.09%，下側で最大 0.14%であり，上側の方が下側より若干小さいが，いずれも整合モデルとよく一致している。変位の相対誤差より拘束表面力の相対誤差の方が大きい。上下どちらの面をスレーブ面としても大差ない。



(a) 上側（15 分割）　(b) 下側（16 分割）

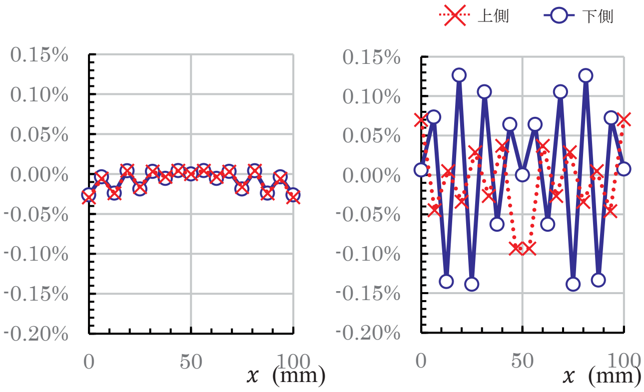
Fig. 7　評価する結合面の節点と要素（15:16 モデル）
(Nodes of a Connecting Surface to be Evaluated Hereafter)

Fig.9 に，上軟下硬で分割比 15:16 のモデルに，軸モードを載荷した場合のz方向変位とz方向拘束表面力の相対誤差を示す。変位の相対誤差は最大 0.15%であり，下側の方が上側より誤差が若干小さいが，違いはほとんどなく，整合モデルとよく一致している。拘束表面力の相対誤差は，上側で最大 0.08%，下側で最大 1.8%であり，上側の方が下側より小さい。上側は整合モデルとよく一致している。変位の相対誤差より拘束表面力の相対誤差の方が大きい。拘束表面力の精度から，上側をスレーブ面に取る方がよいと考えられる。

Fig.10 に，上硬下軟で分割比 15:16 のモデルに，軸モードを載荷した場合のz方向変位とz方向拘束表面力の相対誤差を示す。変位の相対誤差は，上側で最大 0.03%，下側で最大 0.01%であり，下側の方が上側より誤差が小さいが，両者とも整合モデルとよく一致している。拘束表面力の相対誤差は，上側で最大 2.1%，下側で最大 0.04%であり，下側の方が上側より小さい。下側は整合モデルとよく一致している。変位の相対誤差より拘束表面力の相対誤差の方が大きい。拘束表面力の精度から，下側をスレーブ面に取る方がよいと考えられる。

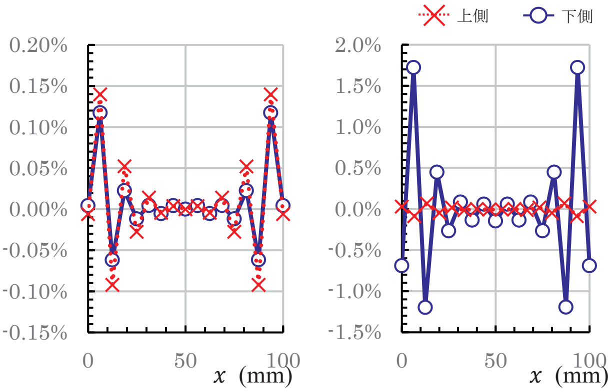
Fig.11 に，均一物性で分割比 7:16 のモデルに，曲げモードを載荷した場合のz方向変位とz方向拘束表面力の相対誤差を示す。変位の相対誤差は，上側で最大 0.7%，下側で最大 2.1%であり，上側の方が下側より小さい。上側は整合モデルとよく一致している。拘束表面力の相対誤差は，上側で最大 1%，下側で最大 18%であり，上側の方が下側より小さい。上側は整合モデルとよく一致している。変位の相対誤差より拘束表面力の相対誤差の方が大きい。下側の誤差は波打った分布になっている。上側をスレーブ面に取る方がよいと考えられる。

Fig.12 に，上軟下硬で分割比 7:16 のモデルに，軸モードを載荷した場合のz方向変位とz方向拘束表面力の相対誤差を示す。変位の相対誤差は，上側で最大 3%，下側で最大 6%と，上側の方が小さい。誤差は端部で大きく出ており，中央部の誤差は小さく，両者の違いもあまりない。拘束表面力の相対誤差は，上側の最大 0.5%に対し，下側の端部付近は，



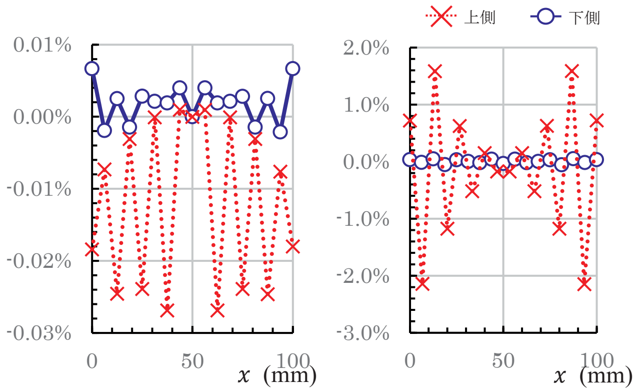
(a) 結合面下側のz方向変位　(b) 結合面のz方向拘束表面力

Fig.8　均一物性，曲げ載荷，分割比 15:16 の相対誤差
(Relative Errors of A-1 and A-2)



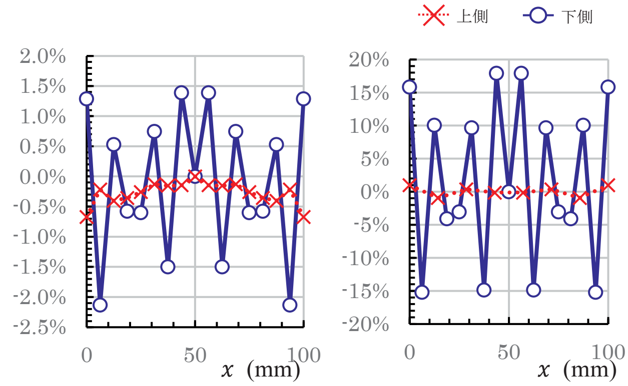
(a) 結合面下側のz方向変位　(b) 結合面のz方向拘束表面力

Fig.9　上軟下硬，軸載荷，分割比 15:16 の相対誤差
(Relative Errors of B-1 and B-2)



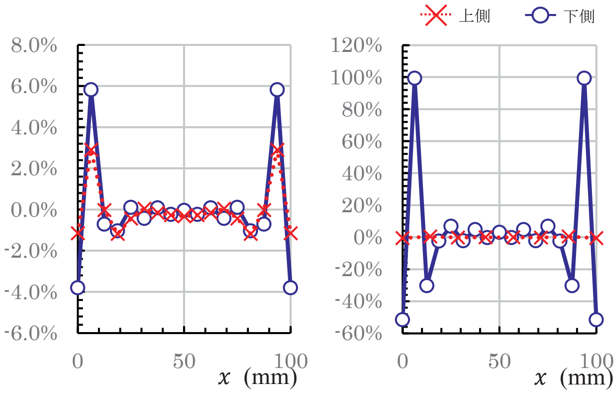
(a) 結合面下側のz方向変位　(b) 結合面のz方向拘束表面力

Fig.10　上硬下軟，軸載荷，分割比 15:16 の相対誤差
(Relative Errors of C-1 and C-2)



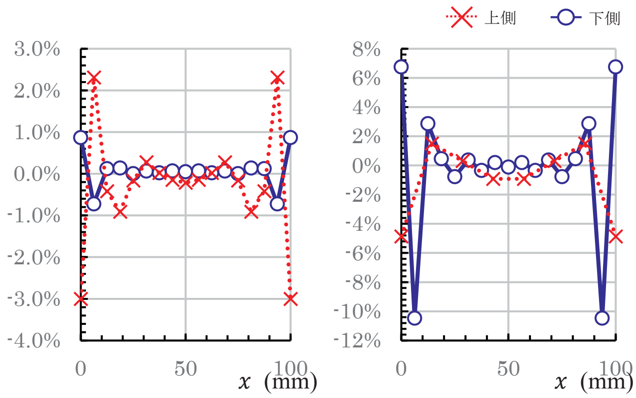
(a) 結合面下側のz方向変位　(b) 結合面のz方向拘束表面力

Fig.11　均一物性，曲げ載荷，分割比 7:16 の相対誤差
(Relative Errors of A-3 and A-4)



(a) 結合面下側のz方向変位　(b) 結合面のz方向拘表面力

Fig.12　上軟下硬，軸載荷，分割比 7:16 の相対誤差
(Relative Errors of B-3 and B-4)



(a) 結合面下側のz方向変位　(b) 結合面のz方向拘束表面力

Fig.13　上硬下軟，軸載荷，分割比 7:16 の相対誤差
(Relative Errors of C-3 and C-4)

100%と非常に大きい。上側は整合モデルとよく一致しているが，下側は端部が整合モデルとずれている。拘束表面力の精度から，上側をスレーブ面に取るほうがよいと考えられる。

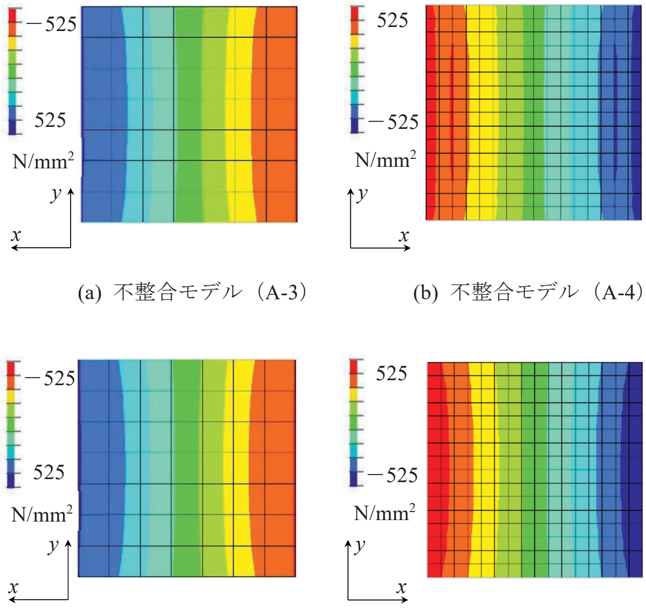
Fig.13 に，上硬下軟で分割比 7:16 のモデルに，軸モードを載荷した場合のz方向変位とz方向拘束表面力の相対誤差を示す。変位の相対誤差は，上側で最大 3%，下側で最大 1%と，下側の方が小さい。誤差は端部で大きく出ており，中央部の誤差は小さく，両者の違いも小さい。拘束表面力の相対誤差は，上側で最大 4%，下側の端部付近で 10%と大きい。どちらかというと上側は整合モデルと一致していると言える。下側は端部が整合モデルとずれている。変位の精度は下側がよいが，拘束表面力の精度は上側がよい傾向がある。上下どちらの側をスレーブ面にとればよいか，一概に結論付けられない。

Fig.14 に，均一物性で分割比 7:16 のモデルに，曲げモードを載荷した場合のz方向拘束表面力のコンタ図を示す。この図は Fig.11(b)に示したものに対応する。(a)に上側をスレーブ面とした不整合モデル, (b)に下側をスレーブ面とした不整合モデルの結果を示す。(c)に分割比 7:7 の整合モデル, (d)に分割比 16:16 の整合モデルの結果を示す。(a)と(c)はよく一致しているが，(b)と(d)は両側の分布が若干異なる。Fig.11(b)の下側の誤差が全体的に大きく波打っていることに対応している。この解析条件では，下側をスレーブ面とすると拘束表面力が全体的に誤差を含むと言える。

Fig.15 に，上軟下硬で分割比 7:16 のモデルに，軸モードを載荷した場合のz方向拘束表面力のコンタ図を示す。この図は Fig.12(b)に示したものに対応する。(a)に上側をスレーブ面とした不整合モデル, (b)に下側をスレーブ面とした不整合モデルの結果を示す。(c)に分割比 7:7 の整合モデル，(d)に分割比 16:16 の整合モデルの結果を示す。(a)と(c)はよく一致しているが，(b)と(d)は分布の傾向が異なる。Fig.12(b)の下側の誤差が波打っていることに対応した様子がコンタ図だとはっきり分かる。この解析条件では，下側をスレーブ面とすると拘束表面力が全体的に誤差を含むと言える。

Fig.16 に，上硬下軟で分割比 7:16 のモデルに，軸モードを載荷した場合の結合面下側のz方向変位のコンタ図を示す。この図は Fig.13(a)に示したものに対応する。(a)に上側をスレーブ面とした不整合モデル, (b)に下側をスレーブ面とした不整合モデル，(c)に分割比 16:16 の整合モデルの結果を示す。(b)と(c)はよく一致しているが，(a)と(c)は分布の傾向が異なる。Fig.13(a)の端部に近いあたりの誤差に対応した様子が分かる。この解析条件では，上側をスレーブ面とすると結合面内の周縁部に変位の誤差が含まれると言える。

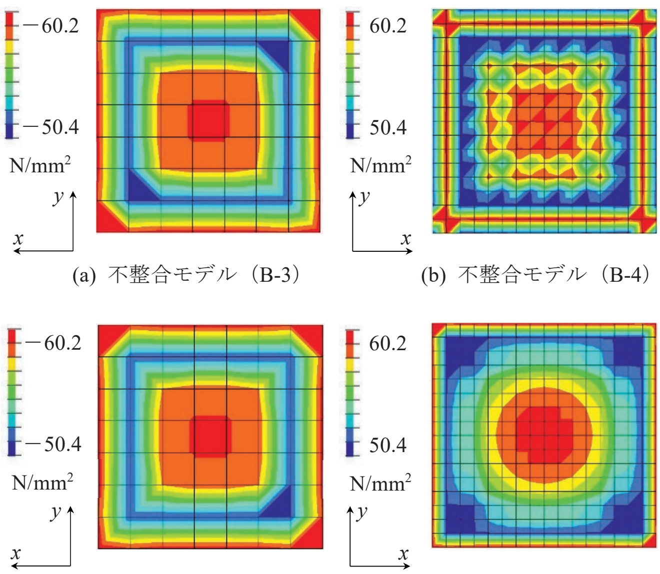
Fig.17 に，同じケースのz方向拘束表面力のコンタ図を示す。この図は Fig.13(b)に示したものに対応する。(a)に上側をスレーブ面とした不整合モデル, (b)に下側をスレーブ面とした不整合モデルの結果を示す。(c)に分割比 7:7 の整合モデル，(d)に分割比 16:16 の整合モデルの結果を示す。(a)と(c)は概ね一致している。(b)と(d)も概ね一致しているが，周縁部中央に少し違いが見られる。Fig.13(b)の誤差が大きく出てい



(a) 不整合モデル（A-3）　(b) 不整合モデル（A-4）

(c) 整合モデル，結合面上側（A-7）　(d) 整合モデル，結合面下側（A-5）

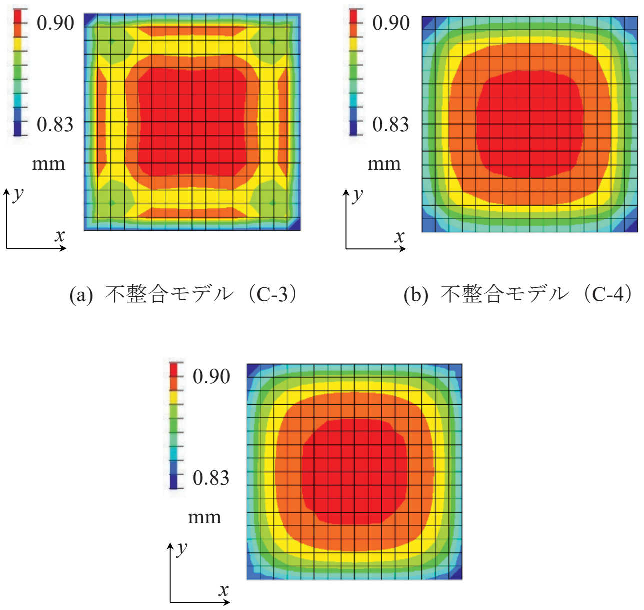
Fig.14　均一物性，曲げ載荷，分割比 7:16 モデルのz方向拘束表面力のコンタ図
(Contour Maps of Z-constraint Traction of A Series)



(a) 不整合モデル（B-3）　(b) 不整合モデル（B-4）

(c) 整合モデル，結合面上側（B-7）　(d) 整合モデル，結合面下側（B-5）

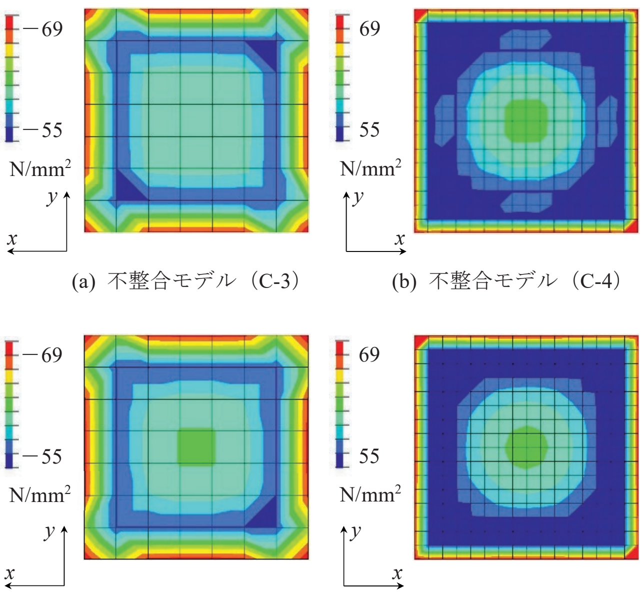
Fig.15　上軟下硬，軸載荷，分割比 7:16 モデルのz方向拘束表面力のコンタ図
(Contour Maps of Z-constraint Traction of B Series)



(a) 不整合モデル（C-3）　(b) 不整合モデル（C-4）

(c) 整合モデル（C-5）

Fig.16　上硬下軟，軸載荷，分割比 7:16 モデルの結合面下側のz方向変位のコンタ図
（Contour Maps of Z-displacement of C Series）



(a) 不整合モデル（C-3）　(b) 不整合モデル（C-4）

(c) 整合モデル，結合面上側（C-7）　(d) 整合モデル，結合面下側（C-5）

Fig.17　上硬下軟，軸載荷，分割比 7:16 モデルのz方向拘束表面力のコンタ図
（Contour Maps of Z-constraint Traction of C Series）

るところに対応していることが分かる。この解析条件では，下側をスレーブ面とすると結合面の周縁部中央に拘束表面力の誤差が含まれると言える。

３．考　察

均一物性の場合における，メッシュの分割比の影響について，Fig.8 と Fig.11 を比較する。Fig.8 より，分割比が 1:1 に近い場合には，スレーブ面の選択の影響はほとんどないことが分かる。一方，Fig.11 より，分割比が 1:2 に近い状態では，結合面の上側をスレーブ面として選択する方が，結合面の変位と拘束表面力の誤差が小さくなることが分かる。つまり，物性が同じで分割比に偏りがある場合には，粗いメッシュの方をスレーブ面として選択する方が精度がよいと考えられる。

軟らかい方を粗く，硬い方を密なメッシュでモデル化した上軟下硬モデルにおける，分割比の影響について，Fig.9 と Fig.12 を比較する。両方の結果で，上側をスレーブ面にとるほうがよいと結論付けられた。したがって，この条件では，分割比に関わらず，軟らかい方をスレーブ面にとるのがよいと考えられる。なお，分割比が 1:2 に近い状態では，端部の変位の誤差が大きくなる可能性がある。

軟らかい方を密に，硬い方を粗なメッシュでモデル化した上硬下軟モデルにおける，分割比の影響について，Fig.10 と Fig.13 を比較する。Fig.10 より，分割比が 1:1 に近い場合には，明確に下側をスレーブ面にとるほうがよいのに対し，Fig.13 より，分割比が 1:2 に近い状態では，上下どちらをスレーブ面にとるのがよいか，明確ではない。したがって，分割比の影響を受けていると言える。分割比が 1:1 に近い場合には軟らかい側をスレーブ面にとればよいが，分割比が 1:1 から離れ，軟側を密に，硬側を粗なメッシュでモデル化する場合には，変位と拘束表面力のいずれか重視する方に基づいてスレーブ面を選ぶのがよいと考えられる。

Table 5 に，有利なスレーブ面を選択した際の最大相対誤差を整理して示す。いずれのケースでも，変位・拘束表面力ともに，分割比 15:16 の方が分割比 7:16 の結果よりも誤差が小さく，精度がよい。分割比はできるだけ 1:1 に近くなるようなモデル化がよいと言える。

Table 5　有利なスレーブ面を選択した際の最大相対誤差
（List of Maximum Relative Errors with Cchoice of Superior Slave Surfaces）

ケース	スレーブ面	変位		拘束表面力	
		15:16	7:16	15:16	7:16
A	上側	0.03 %	0.7 %	0.09 %	1 %
B	上側	0.15 %	3 %	0.08 %	0.5 %
C	下側	0.01 %	1 %	0.04 %	※10 %

※スレーブ面を上側にとった場合，分割比 7:16 の拘束表面力の最大相対誤差は 4%

Ⅴ．おわりに

本報告では，El-Abbasi and Bathe の方法によって不整合

なメッシュを結合した３次元のモデルを有限要素法で解析する際の精度を，単純な変位場の創成解により，点対面の多点拘束と比較した。その結果，面対面の方法では線形場の厳密解を再現できるのに対し，点対面の方法では再現できないことを確認した。また，一定曲げの創成解での結合面での変位と応力について，面対面の方法は点対面の方法よりも誤差が小さいことを確認した。

また，面対面の方法を使う場合には結合面のいずれかをスレーブ面として選ぶ必要がある。メッシュの分割比と結合する部分構造の物性比を変化させて結合面の変位と拘束表面力の精度を比較したところ，粗いメッシュまたは軟らかい材料の面をスレーブ面として選ぶのがよく，分割比はできるだけ 1:1 に近くなるようなモデル化がよいと結論付けられた。ただし，硬い材料を粗いメッシュで，軟らかい材料を密なメッシュでモデル化した場合，スレーブ面をいずれに取るのがよいか明確ではなく，変位と拘束表面力のいずれか重視する方に基づいて選ぶのがよいと考えられる。

以上の検討で静的問題での性状を把握できた。今後，地盤を含む構造物のモデルに面対面の多点拘束を適用する際には，動的問題での精度検証が必要である。

参考文献

１）二村有則，森川博司，小磯利博，坂敏秀；FEM による鉄筋コンクリート造構造物の非線形地震応答解析法，鹿島技術研究所年報，第 65 号, 2017, pp.85-92.

２）日本建築学会編；建物と地盤の動的相互作用を考慮した応答解析と耐震設計，日本建築学会, 2006.

３）高橋容之，坂敏秀，小磯利博，山田和彦；400 万自由度の建屋－地盤一体モデルの有限要素解析法（その１）静的解析・固有値解析，日本建築学会大会学術講演概要集 (九州)，2016, pp.303-304.

４）坂敏秀，高橋容之，小磯利博，山田和彦；３次元有限要素解析における建屋基礎と地盤の結合方法（その２）建屋―地盤一体モデルでの精度検証，日本建築学会大会学術講演概要集(中国) , 2017, pp.249-250.

５）宮村倫司，大崎純，梶原浩一；ソリッド要素でモデル化した超高層鋼構造骨組の地震応答解析，日本建築学会構造系論文集, 84-755, 2019, pp.39-49.

６）後藤和哉，志賀淳二，林雅江，沖田泰良，奥田洋司；アセンブリ構造解析のための多点拘束前処理付き並列反復解法，日本機械学会論文集 A 編，78-789，2012, pp.127-136.

７）Nagi El-Abbasi, Klaus-Jürgen Bathe; Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm, Computers and Structures, 79, 2001, pp.1473-1486.

８）山東篤；自動メッシュ生成を用いた重合メッシュ法における連成項の数値積分，日本機械学会論文集 A 編，77-776, 2011, pp.600-609.

９）山東篤；自動メッシュ分割を用いて重合メッシュ法の連成項を高精度に数値積分するための積分範囲の適切な分割方法，日本計算工学会論文集，2011, pp.20110011.

10）山東篤，坂敏秀，高橋容之，小磯利博；三角形分割に基づく数値積分を用いた三次元問題における面対面の多点拘束法，日本計算工学会論文集，2020, pp. 20200016.

11）Peter Wriggers; Computational Contact Mechanics, Springer, 2006.

12）Michael A. Puso, Tod A. Laursen; A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193, 2004, pp.601–629.

13）坂敏秀，山東篤，高橋容之，小磯利博，山田和彦；面対面多点拘束問題における拘束力規定面の選択が応力分布の精度に及ぼす影響, 第23回計算工学講演会論文集, 2018, A-10-05.

14）Jacob Fish, Ted Belytschko（訳：永井学志，松井和己）；有限要素法，丸善，2008.

A Study on the Accuracy of the Finite Element Method with Face-to-Face Multi-Point Constraints in Static Problems

Toshihide Saka, Atsushi Sando[1] and Toshihiro Koiso

In this paper, regarding the finite element method with face-to-face multi-point constraints (MPC) to connect two non-conforming meshes, some static problems are solved to investigate the accuracy of displacement, stress, and constraint traction on a connecting surface, and to show that the face-to-face MPC is superior to the node-to-face MPC. It is concluded through numerical examples that: 1) the face-to-face MPC can reproduce the exact solution to a linear-displacement-field problem, but the node-to-face MPC does not; 2) displacement and stress calculated by the face-to-face MPC are more accurate than those calculated by the node-to-face MPC; and 3) the surface that is sparser or softer than the other can be chosen as a slave surface for better accuracy.